Rapport de stage enseignement

Au Lycée du Parc de Vilgénis à Massy

Sous la tutelle de Monsieur Jacques Taillet

Florence Fourneau et Anne Van Gorp

M2 Formation des professeurs agrégés en Mathématiques
2015-2016

Remerciements

Nous tenons à remercier le lycée du Parc de Vilgénis pour son accueil et tout particulièrement Monsieur Jacques Taillet, enseignant en mathématiques qui a été notre tuteur, qui nous a accompagnées et qui a partagé sa grande expérience tout au long de notre stage.

Sommaire

I. Présentation du stage

Aimant toutes deux partager notre savoir autant que les mathématiques, nous nous intéressons depuis de nombreuses années au métier d'enseignant en mathématiques. Notre formation, Master 2 Formation des professeurs agrégés en mathématiques à l'Université Paris-Sud, propose d'effectuer un stage d'enseignement.

Au cours de ce stage, nous avons d'abord observé notre tuteur puis nous avons pu pratiquer et donner nos premiers cours. Ce rapport permet de reprendre toutes nos questions, observations et remarques, de les analyser et d'en faire une synthèse qui nous sera utile pour notre futur métier.

1. Le lycée du Parc de Vilgénis

Le lycée du Parc de Vilgénis est situé à Massy dans un parc de 9 ha dans le département de l'Essonne et accueille plus de 2000 élèves et étudiants.

Ce lycée propose de nombreuses formations générales et spécialisées. Pour l'enseignement secondaire, il propose la préparation au baccalauréat général (séries S option SVT, S option SI, ES et L), au baccalauréat technologique (séries STMG et STI2D) et au baccalauréat professionnel dans les secteurs tertiaire et industriel. Pour l'enseignement supérieur, le lycée propose des BTS industriels, des BTS tertiaires, deux licences professionnelles mais aussi des classes préparatoires aux grandes écoles (PTSI/PT, HEC économique, HEC technologique).

Un atelier scientifique est ouvert à tous les élèves (2 heures par semaine). Son objectif est de leur permettre de mener en équipe des travaux scientifiques en utilisant des outils théoriques, apportés par les différents cours de sciences ou directement au sein de l'atelier. Des élèves, de la Seconde à la Terminale, venant de toutes les formations peuvent ainsi réfléchir à un même projet choisi et réalisé par eux-mêmes, chacun apportant un savoir différent suivant sa formation. Malheureusement, nous n'avons pas pu assister à ces séances…

2. Les conditions de stage

Au cours de notre stage, nous avons observé et enseigné dans une classe de seconde générale et une classe de terminale S option SVT, le lundi pendant 8 semaines.

Le niveau de la classe de seconde de 31 élèves est faible en mathématiques. La majorité des élèves veut préparer un baccalauréat technologique STMG. Seulement quelques-uns voudraient continuer leur scolarité en première Scientifique cependant leur niveau ne semble pas leur permettre selon l'avis de notre tuteur. Nous avions cours avec eux le lundi de 14h 00 à 15h 00.

La classe de terminale S avait un niveau assez faible : la majorité de la classe était très moyenne et deux élèves étaient en grande difficulté. Nous avions cours avec cette classe le lundi de 10h à 12h. Il y avait 35 élèves dont une grande majorité de filles.

Ces deux classes ont l'habitude d'utiliser un Tableau Numérique Interactif ; nous nous sommes donc adaptées à ce matériel que nous ne connaissions pas. Les séances de travaux dirigés se passent en salle informatique, les élèves font leurs exercices à l'aide du logiciel Scientific workplace. Ce logiciel permet de faire du calcul formel mais aussi de taper facilement des formules mathématiques.

3. Analyse de l'établissement

Le lycée du Parc de Vilgénis propose un large éventail de formations, on trouve aussi toutes les catégories sociales et culturelles ainsi que des niveaux très hétérogènes. Cette diversité apporte beaucoup autant aux élèves qu'aux enseignants.

L'établissement semble favoriser l'apprentissage (notamment des mathématiques) à l'aide des nouvelles technologies.

Dans le lycée du Parc de Vilgénis, tous les professeurs doivent avancer au même rythme. Il y a des contrôles communs plusieurs fois dans l'année. Les professeurs doivent donc travailler en collaboration. Pour chaque niveau, il y a des modèles de rédaction qui ont été faits pour les exercices types. Ainsi, tous les professeurs se sont mis d'accord sur la manière de rédiger les réponses à un exercice.

II. Phase d’observation

1. Pédagogie utilisée par Monsieur Jacques Taillet

Notre tuteur utilise la pédagogie inversée : les élèves lisent le cours chez eux et le professeur peut donc aller un petit peu plus vite sur les notions faciles et passer plus de temps sur les questions des élèves et les exercices. Pour cela, le polycopié est donné à l’avance.

Notre tuteur utilise une progression spiralée : lors du premier cours auquel nous avons assisté (lundi 12 octobre), il étudiait les primitives et la dérivation avec ses terminales S. Il leur a défini la primitive, leur a fait faire beaucoup de calculs simples de primitives et quand ils auront compris et se seront assez familiarisés avec cette notion, il reviendra sur la primitive, sur sa définition et commencera le chapitre intégration (prévu pour fin janvier). De même, pour les nombres complexes : nous avons fait le début du cours : définition et forme algébrique à la rentrée des vacances de la Toussaint ; il reviendra sur la suite de ce chapitre (forme trigonométrique) à la rentrée des vacances de Noël.

Monsieur Jacques Taillet a également un site internet pour ses classes où il leur met les corrigés détaillés des exercices faits en classe, des devoirs maisons et contrôles. Cela lui permet de ne pas avoir à tout rédiger au tableau et de laisser les élèves corriger les exercices.

Il met également sur son site des exercices supplémentaires, des vidéos sur les mathématiques ainsi que d’autres documents. Il y a aussi un forum pour que les élèves puissent poser des questions. Selon lui, le site marche plutôt bien d’après le nombre de consultations régulières ; cependant, il ne peut pas identifier les élèves qui l’ont regardé. Cela permet aussi de personnaliser le travail : notamment donner des exercices supplémentaires pour ceux qui en ont besoin ou qui veulent aller plus loin.

2. Observations de Florence sur l’autorité et le climat de la classe

Nous n’avons pu observer qu’une seule fois notre tuteur faire cours à sa classe de terminale S et celle de seconde, puisque nous sommes ensuite tout de suite passées à la pratique.

J’ai choisi d’observer plus particulièrement l’autorité et le climat dans la classe car c’est, selon moi, l’élément le plus difficile à acquérir en tant que jeune enseignante, ayant peu de différence d’âge avec les lycéens. Pour cela, je me suis concentrée sur 5 points :

- La **participation en classe** :
  - Est-ce que les élèves participent facilement ?
  - Est-ce qu'ils lèvent la main pour poser les questions ou pour y répondre ?
- L'**autorité et la tolérance du professeur** :
  - Fait-il preuve d'autorité ?
  - Accepte-t-il les retards ?
  - Quel est son niveau de tolérance sonore ?
  - Quelles sanctions donne-t-il ?
  - Pour quelles raisons et quelle est leur efficacité ?
- La **relation du professeur avec ses élèves**.
  - Existe-t-il une relation de confiance et de respect ?
  - Est-ce que les élèves viennent se confier à leur enseignant ?
  - Cette relation permet-elle au professeur de raconter des anecdotes ?
  - Le professeur utilise-t-il l'humour ?
  - Comment est le climat de la classe ?
- La **gestion de la classe** :
  - Existe-t-il un plan de classe particulier ?
  - Est-ce que les sorties de classe sont autorisées ?
  - Existe-t-il une pause ?
  - Comment se déplace le professeur au sein de la classe ?
  - Comment est organisée la fin du cours ?
  - Les élèves sortent ils d'eux-mêmes ?
- Le **langage utilisé** :
  - Comment le professeur s'adresse-t-il à ses élèves ?
  - Est-ce que le professeur tutoie ou vouvoie ses élèves ?
  - Les appellent-ils par leur prénom ou nom ?
  - Comment est sa voix ?

Voir grille d'observation vide en annexe A.

a. <u>Observation de la classe de terminale S</u>

Nous avons observé les terminales S durant une séance de deux heures en classe entière durant laquelle les élèves ont fait des exercices sur le calcul de dérivées, de primitives et des études de variations. Voir grille d'observation remplie en annexe B.

La relation entre le professeur et les élèves est très satisfaisante. En effet, les élèves n'hésitent pas à plaisanter avec leur professeur et réciproquement. Monsieur Taillet utilise beaucoup l'humour et taquine gentiment ses élèves. Les élèves participent beaucoup : ils n'hésitent pas à poser des questions et à répondre à celles qui sont posées par leur enseignant de manière spontanée.

Seul incident observé : l'usage d'un téléphone portable. Notre tuteur demande d'éteindre les portables en début de séance. Malgré cette instruction, un élève a quand même utilisé son téléphone, le professeur a dû confisquer le portable et a déplacé l'élève au premier rang. Le téléphone a été rendu à la fin de la séance.

Les bavardages sont tolérés : du chuchotement à un niveau sonore conséquent. Celui-ci varie en fonction de l'activité : si le professeur est en train de faire cours ou de corriger les exercices : seuls les chuchotements sont tolérés, s'il explique une notion importante il demande le silence et si les élèves font des exercices, ils ont le droit de discuter entre eux.

Notre tuteur veut favoriser les échanges dans la classe entre les élèves. Il ne veut pas d'une classe très silencieuse et il préfère que les élèves s'entraident. Les élèves sont libres de parler entre eux quand il s'agit de mathématiques.
Au contraire, lorsqu'il explique une notion importante, il s'arrête et attend quand il voit qu'un élève ne l'écoute pas.

Un seul élève est arrivé en retard de 5 minutes et a été accepté en cours.

Il n'y a pas de plan de classe particulier.

Il n'y a pas de pause durant les deux heures mais les activités et les supports sont variés : tableau, TNI, … En effet, même si lors de la séance observée, ce sont essentiellement des exercices qui ont été faits, la manière de les réaliser est très diversifiée et très interactive : des exercices sont faits oralement, d'autres sont cherchés par les élèves puis corrigés au tableau par ces derniers. Parfois, pour gagner du temps, le professeur corrige au tableau mais en demandant ce qu'il doit écrire. Il a aussi corrigé certains exercices à l'oral en dictant la réponse bien rédigée.
Lorsque le professeur interroge oralement ces élèves, le rythme de passage est très rapide : quand un élève ne répond pas à une question tout de suite, notre tuteur change d'élève…

Il a également essayé de leur faire deviner des propriétés à l'aide d'exercices. Les élèves n'ont donc pas le temps de s'ennuyer et il est ainsi plus facile de maintenir le calme et leur concentration car ils sont toujours acteurs.

Le professeur se déplace beaucoup au sein de la classe : il se met à l'arrière et passe dans les rangs lorsque les élèves font les exercices ou qu'un élève passe au tableau. Il vérifie ainsi que les élèves se mettent bien à travailler et hausse le ton lorsque ce n'est pas le cas.

Le professeur utilise des polycopiés qui sont distribués avant la séance. Cela permet aussi aux élèves d'écouter ce qu'il dit et de rajouter ce qu'ils veulent sur leur polycopié : explication, exemples, … Le contenu du polycopié est également projeté sur le TNI. Le professeur est ainsi toujours face à ses élèves.

Le professeur ne fait pas l'appel mais note les élèves absents à l'aide d'une tablette numérique. Il connait bien ses élèves et regarde rapidement s'il manque quelqu'un pendant que ses élèves sont occupés à faire des exercices.

En ce qui concerne le langage, le professeur tutoie les élèves et les appelle par leur prénom. Il utilise le langage courant et a une voix modulée : il varie le niveau sonore de sa voix en fonction de l'activité. Le professeur parle plus fort lorsqu'il change d'activité. Pour le cours, il parle plus doucement et hausse la voix quand il corrige un exercice.

Un peu avant la fin du cours, il leur fait faire un peu de calcul mental en leur faisant calculer 35^2,25^2 et 26^2. Cependant, les élèves commencent à ranger leurs affaires plusieurs minutes avant la fin du cours et se lèvent lors de la sonnerie même si leur enseignant n'a pas fini de leur donner leurs devoirs et ne leur a pas dit de sortir.

Autres observations :

Anne et moi sommes passées dans les rangs lors des périodes d'exercices. Nous avons constaté une hétérogénéité dans la classe. La plupart des élèves se met à travailler d'eux-mêmes mais avance très lentement. Par contre, certains élèves se contentent de noter le numéro de l'exercice et d'attendre la réponse alors que d'autres avancent très vite.

Le volume sonore augmente progressivement lors des périodes d'exercices. Lorsqu'il devient conséquent, cela signifie que les élèves ont fini les exercices et donc commencent à s'ennuyer. Notre tuteur nous a donc conseillé d'écouter le niveau sonore pour apprendre à déterminer quand il faut passer à la correction.

J'ai pu remarquer également qu'ils ne lisent pas forcément correctement les énoncés. Par exemple, dans un exercice le graphique donné était la courbe représentative de la fonction dérivée et non celle de la fonction.

Une grande partie des élèves ont des lacunes assez importantes : en effet, la moitié de la classe n'a pas réussi à trouver graphiquement les x tel que $f(x) = 0$. Ils confondent sûrement les abscisses et les ordonnées.

Nous avons également pu observer lors du troisième cours avec les terminales une réunion avec le conseiller d'orientation d'une heure. Il leur a expliqué à l'aide d'un diaporama le fonctionnement du site admission post-bac et présenté plusieurs possibilités d'études après le bac : BTS, classes préparatoires, universités, écoles de commerce, écoles d'ingénieurs, …

Aucun élève de terminale S option SVT ne veut s'orienter vers les études scientifiques comportant des mathématiques sauf une seule élève qui souhaite faire une prépa BCPST. La plupart avait plutôt l'air d'être intéressé par les écoles de commerce ou les études de santé.

b. Observation de la classe de seconde

Nous avons observé les secondes durant une séance d'une heure en classe entière. Voir grille d'observation remplie en annexe C.

Monsieur Taillet nous a informées que les élèves arrivent souvent en retard pour le cours de mathématiques car ils sortent d'un cours où le professeur ne les libère pas forcément à l'heure. Notre tuteur tolère les petits retards mais fait des remarques pour ceux qui arrivent bien après les autres. Les élèves rentrent en classe et s'asseyent immédiatement. Ils n'attendent donc pas qu'on leur dise de s'asseoir, ce qui ne dérange pas notre professeur.

Les élèves ne lèvent pas forcément la main pour répondre aux questions ou pour en poser mais cela convient à notre professeur. Les élèves n'hésitent pas à participer.

Au niveau des bavardages, notre tuteur est moins tolérant avec les secondes. Mais cela dépend aussi de ce qu'ils sont en train de faire : il souhaite le silence quand il explique quelque chose, et il accepte les chuchotements jusqu'à des bavardages assez conséquents au moment des exercices pour la même raison qu'avec les terminales : les encourager à s'entraider.
Il demande le silence quand le niveau sonore devient trop important.
Lorsqu'un élève bavarde (ne parle pas de mathématiques) pendant un exercice il lui dit qu'il va aller le corriger vu qu'il a l'air d'avoir fini.

Comme pour les terminales, il ne semble pas y avoir de plan de classe particulier.

Aucune sortie de classe n'a été demandée et il n'y a pas eu de pause (ce qui parait normal vu la durée de la séance).

Le professeur se déplace dans la classe de la même façon qu'avec la classe de terminale S : il va au fond de la salle quand les élèves font des exercices ou qu'un élève corrige. Lorsqu'il répond à une question il se déplace dans la classe et ne reste pas statique.

Il appelle les élèves par leur prénom et les tutoie, il utilise un niveau de langage courant mais l'humour est moins présent avec la classe de seconde. Il leur raconte quand même quelques anecdotes et leur pose des questions de culture générale. En leur demandant s'ils connaissent Pythagore, par exemple, puis en leur demandant à quelle époque vivait-il.

Il utilise également une voix modulée qui devient plus forte lorsqu'il change d'activité.

Les élèves rangent leurs affaires même si le professeur ne leur a pas dit de le faire. Et sortent juste après la sonnerie sans qu'ils aient eu la permission et même si leur professeur parle encore.

<u>Observations sur le déroulement de la séance</u>:

Le professeur a commencé son cours en interrogeant oralement les élèves sur ce qu'ils avaient vu avant les vacances de la Toussaint : définition d'une fonction affine.

Il a ensuite commencé son cours sur les fonctions affines par un exemple, puis a demandé aux élèves de refaire le même exemple mais avec des nombres différents. Les élèves ont eu beaucoup de difficultés à le faire : ils ont de gros problèmes au niveau de la résolution d'équations et donc de systèmes d'équations.

Notre tuteur projette son cours sur le TNI mais rajoute des exemples au feutre au tableau et note aussi les notions importantes.

Lors des dernières minutes, le professeur leur fait faire du calcul mental comme avec les terminales : calcul de $35^2, 36^2, 40^2, 41^2,\ ? < \sqrt{1650} <\ ?$.

c. <u>Analyse de la phase d'observation</u>

Ma grille d'observation sur l'autorité et le climat dans la classe était plutôt adaptée, j'ai seulement modifié quelques détails.

Le taux de participation était élevé dans les deux classes mais un peu plus chez les terminales. Ils ne lèvent pas forcément la main pour prendre la parole mais cela reste organisé.

En ce qui concerne les sanctions, il n'y en a pas eu beaucoup : un téléphone a été confisqué lors de la séance avec les terminales.

La quasi absence de sanctions est sûrement due au fait que nous étions au lycée et donc que le niveau de tolérance est beaucoup plus élevé qu'au collège du fait de leur plus grande maturité. Il y a une relation de confiance entre l'enseignant et ses élèves. Par exemple, notre tuteur ne sanctionnait pas les élèves qui n'ont pas leur matériel ni ceux qui oubliaient de rendre leur devoir: il leur demandait de le donner dans ce cas pour la prochaine fois.

Pour ce qui est des bavardages, monsieur Taillet est tolérant car il préfère qu'il y ait des interactions dans sa classe plutôt qu'une classe très silencieuse. Il souhaite qu'il y ait des échanges entre les élèves, de l'entraide. Il exige le silence seulement lorsqu'il explique quelque chose de très important. Il réussit à l'obtenir lorsqu'il le souhaite car il a réussi à leur faire comprendre quand est-ce qu'ils sont libres de discuter entre eux et quand est-ce qu'ils ne peuvent pas.

Il y a une bonne relation entre le professeur et les élèves. Les élèves n'hésitent pas à participer et à poser des questions. Ils plaisantent également avec leur professeur ce qui prouve qu'ils se sentent bien en cours de mathématiques. Notre tuteur leur raconte des anecdotes et se permet de faire des digressions surtout avant le cours : cela permet de détendre l'atmosphère. Je trouve cependant qu'il y a une meilleure ambiance et relation avec les terminales S. Cela s'explique sûrement par le fait qu'ils sont déjà plus âgés et que ce sont des élèves qui ont choisi d'aller dans une filière scientifique. Alors que pour la classe de seconde, il y a énormément d'élèves qui n'aiment pas les mathématiques et qui vont s'orienter vers des filières non scientifiques. Il y a donc beaucoup moins d'élèves motivés et intéressés. Notre tuteur est donc plus strict avec les secondes. Il leur laisse moins de liberté et tolère moins les bavardages car ils ne concernent pas forcément le cours. De plus, les secondes ont beaucoup plus besoin d'être encadrés et sont dissipés lorsqu'ils arrivent en cours le lundi après-midi. Le professeur doit donc réussir à ramener le calme et à faire en sorte qu'ils soient concentrés.

Le professeur se déplace beaucoup dans la classe et a une voix modulée qui change en fonction de l'activité et du degré d'attention qu'il veut obtenir des élèves.
Cela permet de maintenir l'attention des élèves.

Ce qui m'a surprise, c'est que les élèves (surtout les terminales S) rangent leurs affaires alors que leur professeur est en train de leur donner des devoirs à faire et qu'ils sortent d'eux-mêmes lors de la sonnerie et surtout que le professeur ne fasse aucune remarque. Il nous a d'ailleurs expliqué qu'il tient vraiment à les laisser sortir à l'heure. Les terminales S partent beaucoup plus vite que les secondes à la fin du cours et cela s'explique par le fait que nous avions les terminales S de 10h 00 à 12h 00 et donc ils se dépêchaient pour ne pas avoir à trop attendre à la cantine. Alors que nous avions les secondes de 14h 00 à 15h 00. Ils étaient donc beaucoup moins pressés de sortir de cours.

Monsieur Taillet utilise beaucoup les nouvelles technologies : l'ordinateur et le TNI. Au lieu de faire l'appel notre tuteur note directement en ligne sur une tablette les élèves absents pendant que ses élèves sont occupés à faire des exercices. Cela permet de gagner du temps plutôt que de devoir appeler tous les élèves. Je pense cependant, qu'il est important lors des premières semaines de faire l'appel pour pouvoir retenir les noms des élèves et leurs visages.

L'utilisation de la pédagogie inversée et la distribution de polycopiés est un gain de temps. Cela permet de pouvoir passer plus de temps sur l'explication des notions importantes et sur les exercices. De plus, les élèves prennent connaissance du chapitre avant la séance de cours et donc peuvent commencer à l'assimiler et voir s'ils ont des questions à poser. Alors que sans cela s'il faut recopier le cours, écouter le professeur et se poser des questions en même temps, il faut être « multitâche » et cela n'est pas facile pour certains élèves en difficulté. Egalement, tous les élèves ont le cours de mathématiques pratiquement complet en terminales S, bien utile pour les révisions du bac.

Cependant, je me pose les questions suivantes :

- La pédagogie inversée est-elle efficace ?
- Est-ce que tous les élèves lisent les cours à l'avance chez eux ?

Je ne suis pas sure que cela convienne à tout le monde. Certains élèves ont besoin d'écrire le cours pour se l'approprier. De plus, il y a des élèves peu organisés qui risquent de perdre les polycopiés ou de les oublier pour la séance suivante. Et en ce qui concerne les secondes moins motivés par les mathématiques, la majorité de la classe risque de ne pas lire le cours avant de venir en classe (élément qu'il faudrait vérifier). Pour utiliser la pédagogie inversée et pour qu'elle soit utile, je pense qu'il faut avoir une classe avec des élèves sérieux et motivés.

Notre tuteur utilise aussi la progression spiralée.
Cela permet de prendre un peu de recul sur les notions importantes et d'avoir le temps de les intégrer et aussi de stimuler plusieurs fois la mémoire. Cependant, cela peut être perturbant, je pense, pour les élèves d'avoir un cours puis la suite plusieurs mois après. Cela fait changer très souvent de chapitres. Nos élèves ont eu un peu de mal avec le fait que le début du chapitre sur les nombres complexes n'ait duré qu'une semaine puis qu'on soit repassé à l'étude des fonctions réelles ensuite. Cela peut également être perturbant pour les élèves désordonnés (mélange ou perte de cours).

3. Observations de Anne

a. Axe d'observation

Nous avons observé notre tuteur dans les classes de seconde et de terminale S lors de la première séance uniquement. J'ai orienté mon observation sur la gestion du temps et le rythme du cours. J'ai donc porté mon attention sur les rituels de début de cours, sur la dynamique du cours, sur la gestion du temps et sur la fin du cours.

Pour le début du cours, je me suis intéressée à la durée nécessaire pour que les élèves soient prêts à travailler, mais aussi à la présence de rappels et/ou d'une interrogation orale sur les notions du cours précédent.

Pour le cœur du cours, l'objet principal de mon observation était l'alternance entre les différentes phases du cours ; Alternance entre cours, exercices, recherche personnelle, TICE, discours méta mais aussi alternance entre oral et écrit. Le rythme du cours dépendant aussi des questions posées par les élèves, le second objet de mon observation était la place laissée aux questions.

Pour la fin du cours, il s'agissait de voir si le cours finissait juste à la sonnerie ou après la sonnerie.

La discipline entre également dans mon observation puisque suivant l'ambiance de la classe, le rythme est différent et les rappels à l'ordre peuvent prendre un temps considérable dans un cours.

J'ai utilisé une grille d'observation pour pouvoir relever tous ces points rapidement. Voir grille d'observation vide en annexe D.

b. Observation de la classe de terminale S

La première phase importante du cours est l'accueil des élèves par le professeur. Notre tuteur accueille tous ses élèves sans exception ; il fait beaucoup de plaisanteries afin de mettre une bonne ambiance dans la classe et créer une confiance entre lui et ses élèves. A la deuxième sonnerie tous les élèves sont installés et après une simple demande de calme ils se sont mis au travail.

Le cours débute alors par un court exercice à l'oral (environ 15 minutes) qui reprend toutes les notions vues au cours précédent. Le professeur semble improviser les questions, les élèves répondent sans demander la parole, l'échange est alors assez rapide. Un élève est ensuite envoyé au tableau pour les questions plus difficiles. Finalement l'exercice est à refaire à l'écrit pour le lendemain.

Le professeur a alors enchaîné sur une phase d'exercices. Tout d'abord les élèves doivent chercher par eux-mêmes ; bien que tous les élèves ne soient pas au travail et qu'il y ait des bavardages, le professeur ne demande pas le calme. Les élèves sont habitués à s'entraider et à partager leurs idées lors des phases de recherche. Vient ensuite la correction quand quelques élèves ont réussi l'exercice, le professeur corrige au tableau en demandant les réponses aux élèves pour gagner du temps. Le professeur met alors l'accent sur les notions importantes et s'assure que tout le monde ait compris. Le rythme du cours est alors adapté à la classe : tant que les élèves n'ont pas compris, le professeur recommence en proposant un exemple similaire. Le corrigé étant assez succinct, un corrigé complet est mis à la disposition des élèves sur internet. Suivent alors de la même manière plusieurs exercices.

La fin du cours est anticipée par le professeur, mais une fois que la sonnerie retentit, il garde les élèves en classe encore quelques minutes pour faire un peu de calcul mental. Les élèves rangent leurs affaires alors que le professeur parle mais cela est accepté par celui-ci.

Voir grille d'observation remplie en annexe E.

c. <u>Observation de la classe de seconde</u>

De la même manière que pour les terminales, le professeur accueille ses élèves. Même si il reste sur le ton de la plaisanterie, cette fois, il essaye de calmer les élèves ; en effet les élèves arrivent souvent très dissipés du cours précédent. Les élèves se mettent plus difficilement au travail mais la plupart s'y met relativement vite.

Le cours commence par des rappels de définitions vues au cours précédent. Le professeur met l'accent sur les erreurs courantes. Cette phase ne dure que quelques minutes.

Le cours continue par une phase de cours. Le professeur commence par donner un exemple pour faire le lien entre les notions vues et les notions qu'ils vont découvrir. Il fait le premier exemple avec eux, les élèves et le professeur échangent idées et remarques. Une fois l'exemple terminé, le professeur fait un bref point de cours et donne un deuxième exemple ; le principe de cet exercice est le même que pour le premier exemple. Les élèves doivent alors chercher par eux même. Comme pour les terminales, les élèves échangent et s'entraident, le professeur est néanmoins un peu plus strict qu'avec les terminales. Comme les élèves ont beaucoup de difficultés, cette phase recherche est très courte. Le professeur corrige, réexplique ce qui n'est pas compris et rend de nouveau un exemple similaire, cette fois les élèves sont plus à l'aise, la phase recherche est courte mais plusieurs (mais pas la majorité) ont réussi l'exercice. Un élève corrige rapidement au tableau et le professeur enchaine sur une deuxième notion du cours mais il n'a plus le temps pour la mettre en application sur un exemple.

La fin du cours est, comme pour les terminales, anticipée. Le professeur consacre de nouveau quelques minutes pour le calcul mental, les élèves sortent à l'heure.

Voir grille d'observation remplie en annexe F.

d. Analyse de la phase d'observation

Tout d'abord, la grille d'observation ne m'a pas semblé adéquate à l'observation de mon tuteur. Celui-ci n'alterne pas entre le cours et les exercices lors des séances. En effet, soit il s'agit d'une séance d'exercices, soit il s'agit d'une séance de cours.

Lors des séances de cours, le professeur n'hésite pas à mettre énormément d'exemples. Pour gérer son temps et mettre du rythme, ces exemples se font principalement à l'oral en interaction ; le professeur interagit avec les élèves et les élèves discutent le problème entre eux. Les phases de recherche sont très courtes. Les nombreux exemples permettent aux élèves de ne pas décrocher, ils sont sans cesse sollicités par le professeur. Le tableau numérique permet de gagner du temps puisqu'on peut projeter un polycopié, les élèves n'ayant rien à recopier, réfléchissent plus rapidement aux exemples proposés.

Lors des séances d'exercices, il y a une alternance entre phase de recherche et correction. La correction se fait rapidement, une correction détaillée étant mise en ligne à disposition des élèves. La durée de la phase de recherche dépend de l'exercice mais n'est jamais très longue, sinon les élèves arrêtent de chercher et se mettent à bavarder ; il est alors difficile de récupérer leur attention.

Pour le début du cours, les élèves se mettent assez vite au travail grâce à la bonne ambiance créée dans la classe par notre tuteur ; le rituel d'accueil est très important. Les rappels de début de cours sont également très importants, ils permettent aux professeurs d'apprécier les difficultés des élèves et aux élèves de faire le lien avec les notions qu'ils vont découvrir.

La gestion des questions est plus difficile, il s'agit de savoir si la question posée par un élève est un problème qu'il rencontre lui particulièrement ou si tous les autres élèves le rencontrent également. Si c'est un problème qui concerne un seul élève, la réponse doit être brève ; en revanche, si la question concerne toute une partie de la classe, il faut réexpliquer les notions du cours qui posent problème, illustrer par des exemples et refaire des exemples similaires jusqu'à ce que cela ne pose plus de problème.

Quitte à modifier ce qui était prévu, les élèves doivent sortir à l'heure. On peut donc proposer, si on manque de temps, un court exemple ou alors une activité de calcul mental.

Finalement, la discipline est importante dans le rythme du cours. Si les élèves ont décroché, ils bavardent et il est ensuite difficile de les remettre au travail. Il faut donc faire attention à la durée des phases de recherche et aux bavardages (même si les élèves sont autorisés à échanger leurs idées, le niveau sonore doit rester assez bas). La relation de confiance entre le professeur et ses élèves permet d'améliorer le rythme ; en effet les élèves seront plus attentifs et suivront plus facilement. Une bonne ambiance de classe permet également de laisser les élèves s'entraider et d'avoir une classe en interaction.

4. Observations communes

a. Observation d'un conseil de classe

Nous avons pu assister à un conseil de classe de terminale S option SVT, lundi 7 décembre de 16 h 30 à 18 h 00 mais malheureusement ce n'était pas celui de notre classe.

C'est la proviseure adjointe qui ouvre le conseil de classe en donnant la parole au professeur principal de la classe.

Tout d'abord, le professeur principal (le professeur de sciences physiques et chimie) a parlé de façon générale de la classe. Cette classe a un assez bon niveau mais les élèves manquent d'attention en cours de physique-chimie, ne font pas toujours le travail demandé à la maison et peu d'élèves viennent en accompagnement personnalisé proposé par le lycée.

Ensuite, les autres professeurs ont pris la parole chacun leur tour afin de se présenter au représentant des parents d'élèves et pour donner leur avis sur la classe. Ils sont tous globalement du même avis.

Puis ce fut au tour des représentants des élèves : les deux délégués ont exposé l'avis des élèves sur l'ambiance de la classe et sur les cours.

Puis vint le tour de la représentante des parents, elle a fait part de l'avis des parents concernant les cours. Et les professeurs concernés se sont expliqués.

Ensuite est venu le cas par cas : les élèves de la classe sont passés en revue par ordre alphabétique. Pour chaque élève, on analysait d'abord sa moyenne dans chaque discipline à l'aide d'un diagramme polaire que l'on comparait au profil de la classe. Cela permettait de voir facilement le niveau global de l'élève et aussi si son profil était homogène ou pas. Puis était projeté le bulletin de l'élève avec les notes et appréciations. Une appréciation globale avait déjà été écrite par le professeur principal. La proviseure adjointe demandait si tout le monde était d'accord et si ce n'était pas le cas, ils discutaient de ce qu'il fallait mettre ainsi que de la mention méritée (Encouragements, Compliments, Félicitations). Certains élèves n'ont pas eu la mention qui était prévue au début à cause de leur manque de participation.

Ils se sont aussi penchés sur le cas d'une élève cumulant les retards et les absences lors des premiers cours de la journée. Ce sont les délégués qui ont expliqué que cette élève habitait loin. Ils essayeront de contacter les parents pour trouver une solution à ce problème.

Le conseil de classe a duré seulement une heure et demie pour 35 élèves. On a passé rapidement les cas des élèves sans difficulté particulière. En effet, plusieurs conseils de classe se succèdent sur une période très courte. Les équipes éducatives sont obligées d'aller très vite. Les cas particuliers concernant les élèves en grande difficulté ou ayant des besoins spécifiques doivent être abordés en dehors du conseil de classe et avant si possible.

b. Observation de l’entrée en classe dans une seconde professionnelle

Au cours de notre stage nous avons également observé l’entrée en classe d’une seconde professionnelle MIC (microtechniques).

La disposition de la classe est différente que dans les filières générales. Les classes étant à faible effectif (cette classe comptait une dizaine d’élèves), chacun dispose d’un « poste de travail » avec une table et un ordinateur. Il y a ensuite une grande table commune au centre de la salle.

Comme dans les autres classes, le professeur accueille tous les élèves un par un. Ensuite chaque élève doit déposer son carnet de correspondance sur la grande table du milieu. Les élèves s’assoient seulement quand le professeur les a autorisés, mais ils sont déjà dans une ambiance de travail. A peine passent-ils la porte, le professeur exige du calme et aucun débordement n’est accepté.

Nous avons donc constaté que le rituel d’entrée en classe était différent suivant les filières. Ici, le professeur est strict dès l’entrée en classe (pas de plaisanteries) sans être désagréable, mais on sent que cela est nécessaire pour que les élèves travaillent.

Il faut alors s’adapter rapidement à la classe en charge, établir des rituels et des règles pour que les cours se passent le mieux possible tout au long de l’année. Il ne s’agit pas d’être désagréable mais simplement de poser des limites, afin que les élèves progressent le plus vite possible dans une bonne ambiance.

III. Présentation d'un scénario

1. Présentation du travail effectué par Florence

Nous avons abordé plusieurs chapitres différents avec les deux classes sur les deux mois de notre stage. Nous avons dû nous adapter aux conditions imposées par l'établissement, tous les professeurs de mathématiques devant suivre la même progression. Nous n'avons donc pas pu faire de chapitre filé.

Cela nous a cependant permis de traiter plusieurs chapitres différents avec eux et de voir ce qui leur posait problème à chaque fois.

Nous avons enseigné pour la première fois, une heure sur les deux prévues lundi 2 novembre avec la classe de terminale S : les élèves ayant un devoir la première heure. Nous en avons profité pour nous initier à l'utilisation du Tableau Numérique Interactif puis le restant de l'heure, nous avons essayé de faire un barème pour le contrôle.

Nous avons ensuite abordé le début du chapitre sur les nombres complexes en commençant par une introduction historique (voir en annexe G). Notre tuteur nous a reproché de ne pas avoir donné assez d'exemples et donc nous sommes allés deux fois plus vite que ce qu'il aurait fait. Il a bien assisté sur l'importance de tout illustrer par un ou plusieurs exemples afin de s'assurer qu'ils aient bien compris.

L'après-midi, nous avons observé la classe de seconde.

Notre deuxième séance de pratique fut donc le lundi 9 novembre où nous avons commencé le cours sur les limites de fonction avec les terminales S (voir en annexe H) et fait une séance d'exercices sur les fonctions affines avec les secondes.

Je me suis ensuite occupée seule d'une séance d'exercices avec les secondes sur des problèmes sur les fonctions affines.

Puis, j'ai fait une séance de cours et exercices avec les terminales S sur le chapitre « Continuité ». C'est cette séance que je développerai.

J'ai également fait avec les secondes une séance d'exercices sur la distance entre deux points et sur les coordonnées du milieu d'un segment.

Et pour finir, j'ai fait une séance d'exercices avec les terminales S sur la fonction exponentielle (voir en annexe L).

2. Séance préparée par Florence : « Continuité en terminale S »

a. Préparation de la séance sur « La continuité »

Mon cours dans son intégralité est présenté en annexe J.

Je vais présenter une séance de cours et exercices que j'ai faite sur le chapitre « Continuité » avec les terminales S le lundi 23 novembre de 10h 00 à 12h 00.

Lors des deux semaines précédentes, les élèves ont vu le chapitre : « Limites de fonctions ». Il s'agissait donc de commencer et finir le cours sur le chapitre « Continuité » (ce chapitre est assez court) et ensuite de faire des exercices sur ce qu'ils venaient de voir et ainsi réviser en même temps les limites de fonctions.

Les objectifs de la séance étaient :

- de définir la continuité d'une manière intuitive, illustrée par des exemples de fonctions continues et discontinues.
- de leur donner les outils nécessaires pour justifier de la continuité d'une fonction : continuité sur leur intervalle de définition des fonctions usuelles, les opérations sur les fonctions continues (somme, produit, quotient, composée de fonctions continues), une fonction dérivable est continue, ...
- d'aborder le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire qui sont admis et savoir les appliquer en exercice pour déterminer les solutions de l'équation $f(x) = k$.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires		On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes. Le théorème des valeurs intermédiaires est admis. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
	• Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné.	Ce cas particulier est étendu au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. ◊ Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Figure 1 : Extrait du programme officiel concernant la continuité

Les pré-requis de ce chapitre sont : les fonctions de référence, la dérivation et la notion de limite.

Partie cours

J'ai découpé le chapitre en deux grandes parties : la première donne les définitions et propriétés de la continuité et la deuxième concerne le théorème des valeurs intermédiaires.

J'ai décidé de commencer mon chapitre par la définition intuitive de la continuité puis de leur donner deux exemples de fonction : une continue et l'autre discontinue.

J'ai ensuite donné la définition de la continuité en un point pour leur permettre d'étudier la continuité là où cela pourrait poser problème. Je leur ai fait faire un exemple ensuite où ils devaient graphiquement déterminer quelles fonctions semblaient continues ou discontinues.

Puis, j'ai présenté la propriété selon laquelle les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. J'ai illustré celle-ci avec les représentations graphiques des fonctions usuelles afin qu'ils se persuadent que ces fonctions sont bien continues. Ainsi que pour faire un rappel sur les fonctions de référence : ensemble de définition et représentation graphique. Cela m'a également permis d'insister sur le fait qu'elles sont continues sur leur ensemble de définition et de faire particulièrement attention aux fonctions rationnelles et aux fonctions comportant une racine carrée.

Je leur ai ensuite formulé la propriété sur la somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues suivie de plusieurs exemples où il fallait justifier proprement la continuité ou discontinuité des fonctions à l'aide des deux propriétés précédentes et de la définition de continuité en un point.

Puis, pour finir cette première partie du cours, j'ai mentionné le fait qu'une fonction dérivable est continue en précisant que la réciproque est fausse (exemple de la fonction valeur absolue).

J'ai ensuite rajouté une remarque présente dans le programme officiel disant que les flèches obliques dans un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Cette première partie du cours ne pose, selon moi, aucune difficulté particulière.

La difficulté de ce chapitre est le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire : il faut que les élèves arrivent à comprendre ce théorème et donc ne pas oublier d'hypothèses. Il faut également qu'ils ne confondent pas les abscisses et ordonnées au niveau des intervalles.

J'ai donc choisi avant de leur présenter ces deux résultats de leur faire chercher graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 0{,}5$ pour différentes fonctions. Puis, grâce à cela, de leur faire deviner les hypothèses nécessaires pour qu'il y ait au moins une solution et ensuite pour qu'il y ait qu'une seule solution.

Enfin, une fois qu'ils auront une idée assez précise des hypothèses nécessaires je leur montre le théorème des valeurs intermédiaires en leur expliquant ce qu'il veut dire et à quoi il sert.

A la suite du théorème, j'ai ajouté la représentation graphique d'une fonction où l'on pourrait utiliser ce théorème et nous avons essayé ensemble d'appliquer le théorème à cet exemple.

J'ai ensuite procédé de la même façon pour le corollaire en insistant bien sur le fait que la stricte monotonie nous permet d'avoir un résultat plus précis.

Pour cette partie sur le théorème des valeurs intermédiaires, j'avais prévu de passer le temps nécessaire pour que les élèves comprennent ce théorème car il est très important et tombe très souvent au baccalauréat dans les exercices d'étude de fonctions.

Partie exercice

Pour le reste de la séance, j'avais prévu deux exercices d'études de fonction.

Dans le premier exercice, on étudie une fonction polynomiale : tableau de variation complet de la fonction (ensemble de définition, dérivation, dérivée, signe de la dérivée, limites de la fonction), puis résolution de l'équation $f(x) = 0$ à l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Détermination d'un encadrement de la solution à l'aide de la calculatrice. Pour cette question, je leur ai expliqué la méthode à tous en même temps.

Ils ont tous la même calculatrice mais malheureusement le professeur n'avait pas la calculatrice présente sur son ordinateur. J'ai dû leur expliquer en mettant les étapes au tableau. Ensuite il fallait déterminer le signe de la fonction et puis recommencer avec l'équation$f(x) = 5$.

Le deuxième exercice portait sur l'étude d'une fonction rationnelle. Cet exercice est plus long que le premier et un peu plus compliqué. Lors de la première question, il s'agit de déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition et d'interpréter graphiquement. Cela permet de réviser le chapitre précédent et sera utile pour le théorème des valeurs intermédiaires.

Puis il faut étudier la dérivabilité de la fonction et calculer sa dérivée.

Ensuite on s'intéresse à une fonction auxiliaire ayant le même signe que la dérivée, pour cela, on étudie le tableau de variation de cette fonction qui est polynomiale (calcul de la dérivée, et étude du signe de la dérivée - signe d'un polynôme du second degré -) puis on utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit le signe de la fonction auxiliaire, on peut donc dresser le tableau de variation de la fonction. Pour finir, il faut écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe représentative et de la tangente.

J'ai trouvé que ces deux exercices étaient progressifs et très complets. Ils permettent de revoir plusieurs notions différentes et il y a souvent un exercice qui ressemble à cela lors du baccalauréat.

Je me suis surtout questionnée sur la meilleure façon de leur faire comprendre le théorème des valeurs intermédiaires.

b. Analyse a posteriori

La séance s'est bien passée, les élèves étaient à l'écoute surtout en début de cours lors de la première partie : définition et propriétés. Ils ont bien participé et ont eu l'air de comprendre la continuité. Ils ont cependant des difficultés avec les composées de fonctions. Ils n'ont pas tous eu l'air de comprendre ce que c'est.

Les élèves ont commencé à décrocher lorsque j'ai commencé la partie sur le théorème des valeurs intermédiaires malgré la partie introductive que j'avais prévue. J'ai passé beaucoup plus de temps qu'envisagé à expliquer le principe à l'aide d'exemples, un peu plus d'une demi-heure. J'ai dû plusieurs fois réexpliquer, il y avait un problème d'écoute de la part de certains élèves.

Il faudrait que je trouve une autre façon d'expliquer le théorème des valeurs intermédiaires car je me suis rendue compte que de nombreux élèves ont décroché. Un élève m'a également demandé ce que voulait dire corollaire, cette question m'a un peu surprise car je pensais qu'ils connaissaient le mot. Cela m'a permis de voir qu'il faut que je fasse attention aux termes que j'utilise.

Au niveau des exercices, les élèves n'ont pas le même niveau et j'ai eu des difficultés à déterminer le commencement de la correction. Selon mon tuteur, je leur ai laissé beaucoup trop de temps. En effet, j'avais tendance à attendre que tout le monde ait réussi avant d'envoyer quelqu'un corriger. Ce qui fait qu'on avance lentement et donc les meilleurs élèves finissent par s'ennuyer et à bavarder. De plus, les élèves risquent d'aller de plus en plus lentement s'ils voient que je les attends à chaque fois.

J'ai également tendance à perdre du temps pendant les séances d'exercices car je n'ai pas encore le réflexe d'expliquer à l'ensemble de la classe les questions qui reviennent fréquemment. J'ai tendance à répondre à chaque élève individuellement même s'ils ont tous la même difficulté. J'ai également un problème de positionnement de la voix, ma voix ne porte pas assez. Il va falloir que je parle plus fort et que je module davantage ma voix.

3. Présentation du travail effectué par Anne

Au cours de mon stage j'ai préparé pour les terminales en collaboration avec Florence une introduction et le début du cours sur les nombres complexes (forme algébrique) (voir en annexe G) et le début du cours sur les limites de fonctions (voir en annexe H).

Ensuite, j'ai réalisé et présenté seule la fin du cours sur les limites de fonctions (il n'existe pas de polycopié pour cette partie du cours car il ne restait plus que 3 théorèmes à présenter), une séance d'exercices sur les limites de fonctions (voir en annexe I) et enfin une introduction et le début du cours sur la fonction exponentielle (voir annexe K). Je n'ai pas préparé les exercices sur ce chapitre car nous nous chargions des terminales et des secondes à tours de rôle et que la séance d'exercices était prévue pour la semaine suivante.

Pour les secondes, nous avons préparé une séance d'exercices sur les fonctions affines puis j'ai présenté seule le cours sur la distance entre deux points du plan dans un repère orthonormé. J'ai choisi de présenter ce cours directement au tableau (sans polycopié), puisque celui-ci est très rapide et qu'il n'y a qu'une seule notion. Même si il est plus facile pour moi de présenter un cours de cette manière, j'ai regretté de ne pas avoir fait de polycopié. En effet, les élèves ont pris beaucoup de temps pour copier la formule et sa démonstration et en ont profité pour bavarder.

J'ai exposé le début du cours sur les droites du plan lors de la dernière semaine de stage.

J'ai choisi de détailler la préparation de la séance sur la fonction exponentielle présentée aux terminales S.

4. Séance préparée par Anne : « La fonction exponentielle »

a. Préparation de la séance sur la fonction exponentielle

La séquence sur la fonction exponentielle est découpée en deux parties : dans un premier temps il faut définir la fonction exponentielle et donner ses premières propriétés puis il faut faire l'étude de la fonction exponentielle. Ayant seulement deux heures à ma disposition, ma séance portera sur la première partie.

L'objectif est d'introduire la fonction exponentielle, de la définir et de prouver son unicité puisque cela est exigible au baccalauréat. Ensuite, il faut que les élèves se familiarisent avec les différentes propriétés. J'ai décidé de présenter toutes les démonstrations, même si elles ne sont pas exigibles, afin de leur faire utiliser beaucoup de notions qu'ils ont découvert dans les cours précédents, et donc de les habituer à utiliser ces nouvelles notions. La figure 2 présente un extrait du programme officiel concernant la fonction exponentielle.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonction exponentielle		
Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	◾ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur R, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur R telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.
Relation fonctionnelle, notation e^x.	◾ Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$. ⇆ [SPC et SVT] Radioactivité. AP *Étude de phénomènes d'évolution.*

Figure 2 : Extrait du programme officiel concernant la fonction exponentielle

Les démonstrations de l'unicité de la fonction exponentielle et des propriétés de cette dernière font appel à plusieurs notions vues en première S et en terminale S. Il faut savoir dériver une fonction de la forme f(ax+b), savoir dériver un produit de fonctions, savoir déterminer les variations d'une fonction, utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (il faut donc avoir fait le cours sur la continuité d'une fonction) et enfin il faut savoir raisonner par récurrence.

Dans les démonstrations, la principale difficulté semble être l'utilisation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. En effet, les élèves ont découvert ce théorème la semaine précédant mon cours, ils ne sont donc pas à l'aise avec celui-ci. Comme dans cette séance, ce théorème n'apparaît que dans une démonstration non exigible au baccalauréat, je voulais qu'ils comprennent d'eux-mêmes qu'il fallait faire appel à ce théorème plutôt qu'ils réussissent à faire la preuve. Les autres démonstrations demandent quelques astuces mais ne sont pas vraiment difficiles. J'ai donc détaillé toutes les preuves sur un polycopié, je pouvais ainsi interagir avec les élèves et écrire au tableau la preuve au fur et à mesure qu'ils trouvaient les bonnes idées. L'objectif est qu'ils réussissent à trouver d'eux-mêmes les idées de la preuve et que je la mette en forme.

Dans les exemples et exercices, les erreurs de calculs et la confusion entre les formules représentent la plus grande difficulté. Pour cela, j'ai prévu de faire suffisamment d'exemples pour que tout le monde soit plus ou moins à l'aise avec les nouvelles formules.

Les résultats importants à retenir sont la définition de la fonction exponentielle, ses propriétés de positivité, croissance et bijection ; et que les règles de calculs sont les mêmes que pour des puissances. J'ai voulu également les familiariser à la « croissance exponentielle » ; pour cela, j'ai prévu une introduction. Cette introduction fait le lien entre ce cours et le cours sur les suites : ils doivent remarquer grâce à cette activité que la suite des taux d'évolution a le même comportement que la suite de départ mais aussi que la croissance est beaucoup plus rapide que la croissance d'un polynôme par exemple. Mon cours, annoté avec les durées consacrées à chaque partie ainsi que du but et des difficultés de ces dernières est présenté en annexe K.

Si j'avais dû préparer une évaluation sur la fonction exponentielle, celle-ci aurait été une étude de fonction dans laquelle apparaît une exponentielle, qui fait appel à l'étude d'une fonction auxiliaire. Toutes les notions sur la dérivée, sur l'étude des variations, sur les limites de fonctions, sur la continuité et sur le théorème des valeurs intermédiaires auraient ainsi pu être évaluées. De plus, cet exercice aurait été proche des exigences du baccalauréat.

b. Analyse a posteriori

Le principal problème de mon cours est l'introduction. Tout d'abord, certains élèves ont été gênés par l'aspect expérimental, ils ne trouvaient pas rigoureux d'observer l'évolution obtenue grâce au tableur. En effet, mon introduction étant un problème de biologie, j'ai utilisé des méthodes courantes dans cette discipline, qui ne le sont pas en mathématiques (car cela manque de rigueur). Ensuite, les élèves ne sont pas parvenus à comprendre la formule de récurrence de la suite malgré mes multiples tentatives d'explications. Mon exemple ne semble alors pas adapté. Au lieu de définir la suite par « le nombre de bactéries double toutes les quatre heures », j'aurais dû dire « le nombre de bactéries double toutes les heures », ainsi les élèves auraient retrouvé une formule de récurrence sous la forme habituelle ($u_{n+1} = 2u_n$au lieu de $u_{4(n+1)} = 2u_{4n}$)et le lien avec la fonction exponentielle serait resté inchangé. J'ai donc perdu beaucoup de temps sur cette introduction. Au lieu de vouloir réexpliquer de nombreuses fois pour que tout le monde comprenne la formule de récurrence, j'aurais dû dire que j'allais chercher une solution et y revenir à la séance suivante.

Ayant perdu un temps considérable sur l'introduction, j'ai dû accélérer sur la suite ; j'ai néanmoins réussi à garder l'attention de la majorité des élèves. Ceux-ci ont réussi à trouver les idées des démonstrations comme je le voulais. J'ai constaté qu'ils avaient de grosses lacunes sur la dérivée d'une fonction de la forme f(ax+b) et qu'ils ne savaient pas faire le lien entre une fonction de dérivée nulle et une fonction constante. J'en ai donc profité pour faire quelques rappels.

J'ai ensuite eu quelques difficultés à faire comprendre la propriété de bijection. En effet, la définition de fonction bijective ou même le théorème de la bijection n'est pas au programme de terminale S, il est donc difficile de répondre à leurs questions en faisant appel à des notions qu'ils connaissent. Je les ai donc invités à admettre cette propriété et j'ai essayé d'expliquer le phénomène de bijection à l'aide d'un dessin.

Les méthodes de calculs n'ont posé aucun problème. Tous les élèves ont rapidement fait le lien avec les méthodes de calculs pour les puissances.

Par manque de temps, j'ai préféré ne pas présenter les dernières démonstrations afin de pouvoir finir tous les exemples ; malgré cela je n'y suis pas parvenue. J'ai donc pu constater que les élèves n'avaient pas de problème avec l'exemple 2, ayant tout de suite fait le lien avec les puissances. En revanche, beaucoup ont fait des erreurs avec la propriété de bijection dans l'exemple 3. La principale erreur étant : exp(x)=2 équivaut à x=2.

Je n'ai malheureusement pas eu beaucoup de temps pour traiter l'exemple 4. Toutefois, celui-ci ne semblait pas poser de problème aux élèves puisqu'ils avaient compris l'exemple 3, la propriété de bijection et la propriété de croissance.

Aucun élève n'a eu le temps de commencer l'exemple 5, a priori à cause du temps perdu lors de l'introduction, les autres parties n'ayant pas posé de gros problèmes.

5. Conseils donnés par notre tuteur

- Savoir se servir du Tableau Numérique Interactif.
- Ne surtout rien improviser, avoir tout préparé avant le cours. Même les exercices et exemples qui nous semblent évidents. Faire cours c'est comme une pièce de théâtre où l'on doit connaitre tout son texte.
- Il faut accueillir les élèves devant la salle de classe en souriant pour leur donner envie de venir et pour leur signifier qu'ils sont les bienvenus dans notre salle.
- Faire l'appel pendant qu'ils font des exercices afin de gagner du temps.
- Les élèves peuvent ne pas utiliser les bons termes mais on se doit de les corriger après. Bien reprendre le vocabulaire incorrect : réduire, simplifier, factoriser, développer…
- Apprendre à écouter le volume sonore lors d'une séance d'exercices pour déterminer où en sont les élèves.

  Il est difficile de savoir quand corriger un exercice car le niveau des élèves est très hétérogène, il faut savoir se mettre au niveau de tous.
- Il faut présenter de nombreux exemples d'application afin de s'assurer qu'ils ont compris. Introduire puis expliquer par des exemples. Il faut commencer par un premier exemple, puis un second,…etc. Jusqu'à ce qu'ils aient compris.

  Pour expliquer ce qu'est une réciproque : prendre l'exemple du théorème de Pythagore. Leur faire rappeler le théorème puis la réciproque du théorème de Pythagore. Puis ensuite, leur demander d'énoncer la réciproque du théorème que l'on voulait leur faire trouver.

Conclusion

L'observation de notre tuteur nous a permis d'apprendre les bases pour créer un bon climat dans la classe. Cela est difficile mais nécessaire pour que les élèves progressent correctement.

Il faut accueillir les élèves devant la salle de classe en souriant pour leur donner envie de venir et pour leur signifier qu'ils sont les bienvenus. Ensuite, un bon suivi des élèves ainsi qu'une bonne préparation des cours permettent une bonne gestion de la classe. Si les élèves n'arrivent pas à suivre, quel que soit la raison, la relation de confiance entre le professeur et sa classe ne se construira pas.

La pratique accompagnée nous a permis de découvrir nos principaux défauts. Nous avons pu ainsi commencer à les corriger et nous pourrons y faire plus attention lors de nos premières années d'enseignement.

Nous avons pu nous rendre compte des difficultés des élèves mais aussi des difficultés du métier d'enseignant. En effet, préparer un cours demande beaucoup de réflexion et de travail, et faire cours nécessite beaucoup de concentration. Il faut aussi anticiper le plus possible les éventuelles questions et difficultés. Comme une pièce de théâtre, le cours doit être pensé entièrement et répété, il n'y a pas de place pour l'improvisation.

Notre stage fut une expérience très enrichissante mais aussi rassurante puisqu'il constitue une première bonne expérience. Ce stage a conforté notre désir d'enseigner…

Annexe A : Questionnaire vide sur l'autorité et le climat dans la classe

Questionnaire autorité et climat dans la classe

Date :

Classe :

I. Participation

- Taux de participation : ☐ Nul ☐ Faible ☐ Moyen ☐ Elevé
- Manière de poser les questions : ☐ Lève la main ☐ Ne lève pas la main
- Manière de répondre aux questions : ☐ Lève la main ☐ Ne lève pas la main ☐ Spontanée ☐ Imposée

  Autres observations :

II. Autorité et tolérance

- Le professeur fait-il preuve d'autorité ? ☐ Pas du tout ☐ Un peu ☐ Moyennement ☐ Beaucoup
- Retard toléré (en minutes) : ☐ 0 ☐ 5 ☐ 10 ☐ >10
- Niveau de tolérance sonore : ☐ Absent ☐ Chuchotement ☐ Conséquent
- Sanctions : Causes : Effets :
- Efficacité de la sanction : ☐ Oui ☐ Non ☐ Autre :

  Autres observations :

III. Relation avec l'élève

- Confidences des élèves à l'enseignant : ☐ Oui ☐ Non
- Humour : ☐ Absent ☐ Peu ☐ Modéré ☐ Beaucoup
- Anecdotes de l'enseignant / culture générale : ☐ Oui ☐ Non
- Respect mutuel élèves/enseignants : ☐ Oui ☐ Non
- Climat de la classe : ☐ Tendu ☐ Neutre ☐ Détendu

  Autres observations :

IV. Gestion de la classe

- Plan de classe particulier : ☐ Oui ☐ Non
- Comment se passe l'entrée en classe ?
- Présence d'une pause : ☐ Oui ☐ Non
- Sorties de classe autorisées : ☐ Oui ☐ Non
- Déplacements du professeur dans la classe : ☐ Oui ☐ Non
  - Quand : Comment :
  - Quand : Comment :
  - Quand : Comment :
- Gestion de la fin du cours
  - Les élèves rangent-ils leurs affaires avant la fin de la séance ? ☐ Oui ☐ Non
  - les élèves sortent-ils sans l'autorisation préalable de leur professeur ? ☐ Oui ☐ Non

  Autres observations :

V. Langage

- Comment s'adresse le professeur à ses élèves : ☐ Tutoiement ☐ Vouvoiement ☐ Nom de famille ☐ Prénom ☐ Monsieur/Madame
- Niveau de langage de l'enseignant : ☐ Familier ☐ Soutenu ☐ Courant
- Voix : ☐ Douce ☐ Forte ☐ Modulée ☐ Monotone ☐ Autre :

  Autres observations :

Annexe B : Questionnaire rempli en terminale S

Questionnaire autorité et climat dans la classe

Date : 12/10/2015 10h-12h

Classe : Terminale S

I. Participation

- Taux de participation : ☐ Nul ☐ Faible ☐ Moyen ☒ Elevé
- Manière de poser les questions : ☐ Lève la main ☒ Ne lève pas la main
- Manière de répondre aux questions : ☐ Lève la main ☒ Ne lève pas la main ☒ Spontanée ☐ Imposée

  Autres observations :

II. Autorité et tolérance

- Le professeur fait-il preuve d'autorité ? ☐ Pas du tout ☐ Un peu ☒ Moyennement ☐ Beaucoup
- Retard toléré (en minutes) : ☐ 0 ☒ 5 ☐ 10 ☐ >10
- Niveau de tolérance sonore : ☐ Absent ☒ Chuchotement ☒ Conséquent
- Sanctions : *Téléphone confisqué et élève déplacé* Causes : *Téléphone utilisé en cours* Effets :
- Efficacité de la sanction : ☒ Oui ☐ Non ☐ Autre :

  Autres observations : *Les élèves sont libres de parler entre eux pour parler de maths*

  Quand le prof corrige il y a encore des bavardages mais moins. Il demande que le volume sonore baisse : « Je n'entends pas, il y a du bruit de fond ».

  Bavardages conséquent pendant les exercices car entraide.

  Quand il explique demande aux élèves d'écouter.

III. Relation avec l'élève

- Confidences des élèves à l'enseignant : ☒ Oui ☐ Non
- Humour : ☐ Absent ☐ Peu ☐ Modéré ☒ Beaucoup
- Anecdotes de l'enseignant / culture générale : ☒ Oui ☐ Non

- Respect mutuel élèves/enseignants : ☒ Oui ☐ Non
- Climat de la classe : ☐ Tendu ☐ Neutre ☒ Détendu

Autres observations : *Plaisante beaucoup avec les élèves. Bonne relation avec les élèves. Les élèves respectent leur professeur tout en plaisantant avec lui.*

IV. Gestion de la classe

- Plan de classe particulier : ☐ Oui ☒ Non
- Comment se passe l'entrée en classe ? *Les élèves s'installent au fur et à mesure de leurs arrivées*
- Présence d'une pause : ☐ Oui ☒ Non
- Sorties de classe autorisées : ☐ Oui ☐ Non *Aucune sortie de classe n'a été demandée*
- Déplacements du professeur dans la classe : ☒ Oui ☐ Non
  - Quand : *Exercices ou exemples* Comment : *Fond de la classe ou passe entre les rangs*
  - Quand : *Elève au tableau* Comment : *Fond de la classe*
  - Quand : Comment :
- Gestion de la fin du cours
  - Les élèves rangent-ils leurs affaires avant la fin de la séance ? ☒ Oui ☐ Non
  - les élèves sortent-ils sans l'autorisation préalable de leur professeur ? ☒ Oui ☐ Non

Autres observations : *Le professeur ne cesse de changer la forme des exercices pour diversifier : oral, écrit. Les exercices sont très interactifs. Ce sont les élèves qui corrigent : soit au tableau, soit oralement. Le professeur leur fait faire du calcul mental à la fin de la séance*

V. Langage

- Comment s'adresse le professeur à ses élèves : ☒ Tutoiement ☐ Vouvoiement ☐ Nom de famille ☒ Prénom ☐ Monsieur/Madame
- Niveau de langage de l'enseignant : ☐ Familier ☐ Soutenu ☒ Courant
- Voix : ☐ Douce ☐ Forte ☒ Modulée ☐ Monotone ☐ Autre :

Autres observations : *Voix plus forte lorsque l'on change d'activité : que l'on passe à la phase de recherche à celle de correction par exemple.*

Annexe C : Questionnaire rempli en seconde

Questionnaire autorité et climat dans la classe

Date : 02/11/2015 14h-15h

Classe : Seconde générale

I. Participation

- Taux de participation : ☐ Nul ☐ Faible ☐ Moyen ☒ Elevé
- Manière de poser les questions : ☐ Lève la main ☒ Ne lève pas la main
- Manière de répondre aux questions : ☒ Lève la main ☒ Ne lève pas la main ☒ Spontanée ☐ Imposée

Autres observations : *Le taux de participation est élevé mais moins que chez les TS. Pour ce qui est de lever la main cela dépend. Tous ne le font pas. Certains élèves ne participent pas du tout. Ce sont toujours les mêmes qui participent.*

II. Autorité et tolérance

- Le professeur fait-il preuve d'autorité ? ☐ Pas du tout ☐ Un peu ☒ Moyennement ☐ Beaucoup
- Retard toléré (en minutes) : ☐ 0 ☒ 5 ☐ 10 ☐ >10
- Niveau de tolérance sonore : ☒ Absent ☒ Chuchotement ☒ Conséquent *Cela dépend de quand*
- Sanctions : Causes : Effets :
- Efficacité de la sanction : ☐ Oui ☐ Non ☐ Autre :

Autres observations : *Le professeur est moins tolérant avec les secondes qu'avec les terminales S mais il l'est quand même au niveau des bavardages. Le retard est toléré tant qu'il n'est pas trop important. Les élèves arrivent souvent en retard car ils ont cours avant. Le niveau de tolérance sonore varie comme avec les terminales S. Si un élève bavarde (ne parle pas de maths) pendant un exercice il le menace d'aller le corriger.*

III. Relation avec l'élève

- Confidences des élèves à l'enseignant : ☒ Oui ☐ Non
- Humour : ☐ Absent ☐ Peu ☐ Modéré ☒ Beaucoup
- Anecdotes de l'enseignant / culture générale : ☒ Oui ☐ Non
- Respect mutuel élèves/enseignants : ☒ Oui ☐ Non
- Climat de la classe : ☐ Tendu ☒ Neutre ☒ Détendu

Autres observations : *Bonne relation avec les élèves mais relation un peu plus tendue qu'avec les terminales S. Il utilise également un peu moins l'humour même s'il est toujours très présent.*

IV. <u>Gestion de la classe</u>

- Plan de classe particulier : ☐ Oui ☒ Non
- Comment se passe l'entrée en classe ? *Les élèves s'installent au fur et à mesure de leurs arrivées*
- Présence d'une pause : ☐ Oui ☒ Non
- Sorties de classe autorisées : ☐ Oui ☐ Non *Aucune sortie de classe n'a été demandée*
- Déplacements du professeur dans la classe : ☒ Oui ☐ Non
  - Quand : *Exercices ou exemples* Comment : *Fond de la classe ou passe entre les rangs*
  - Quand : *Elève au tableau* Comment : *Fond de la classe*
  - Quand : Comment :
- Gestion de la fin du cours
  - Les élèves rangent-ils leurs affaires avant la fin de la séance ? ☒ Oui ☐ Non
  - les élèves sortent-ils sans l'autorisation préalable de leur professeur ? ☒ Oui ☐ Non

Autres observations : *Un rappel de cours sur les fonctions affines a été fait en début de séance. Puis il a fait du cours en faisant beaucoup d'exemples. Et surtout en faisant refaire le même exemple aux élèves avec des chiffres différents à chaque fois. Grosses lacunes dans la résolution d'équations.*

Projette son cours au tableau mais fait des exemples au feutre. De même pour les notions importantes.

Le professeur leur fait faire du calcul mental à la fin de la séance exactement comme avec les terminales S

V. <u>Langage</u>

- Comment s'adresse le professeur à ses élèves : ☒ Tutoiement ☐ Vouvoiement ☐ Nom de famille ☒ Prénom ☐ Monsieur/Madame
- Niveau de langage de l'enseignant : ☐ Familier ☐ Soutenu ☒ Courant
- Voix : ☐ Douce ☐ Forte ☒ Modulée ☐ Monotone ☐ Autre :

Autres observations : *Voix plus forte lorsque l'on change d'activité : que l'on passe à la phase de recherche à celle de correction par exemple. Voix plus douce lors du cours. Augmente le volume de sa voix quand il veut attirer l'attention des élèves.*

Annexe D : Grille d'observation vide sur la gestion du temps et le rythme du cours

Date :
Classe :
Observation : Gestion du temps, rythme du cours

DEBUT DU COURS	**COEUR DU COURS**	**FIN DU COURS**
Durée : Activité : - interrogation sur le dernier cours - correction exercices (écrit ? oral?)	Cours / Exercices / TICE / Méta Ecrit / Oral Durée : Observations :	Travail à la maison ?
	Cours / Exercices / TICE / Méta Ecrit / Oral Durée : Observations :	
- Mobilité du prof dans la salle - Comment sont introduits les nouveaux chapitres ? (exos, activités, exemples?) - Comment sont gérées les questions des élèves ? - Adaptation du prof en fonction de l'ambiance de la classe ? - Temps pris par la discipline - Le prof fait-il intervenir les élèves ? Interactivité ? - Comment sont faites les transitions ? - Temps laissé pour réfléchir à un exo ? - Rythme différent lorsque la notion est complexe ? - Utilisation du discours Méta	Cours / Exercices / TICE / Méta Ecrit / Oral Durée : Observations :	**Observations, remarques générales :**
	Cours / Exercices / TICE / Méta Ecrit / Oral Durée : Observations :	

Annexe E : Grille d'observation sur la gestion du temps et le rythme du cours remplie en terminale S

Date : 12/10/2015 de 10H à 12H
Classe : Terminales S
Observation : Gestion du temps, rythme du cours

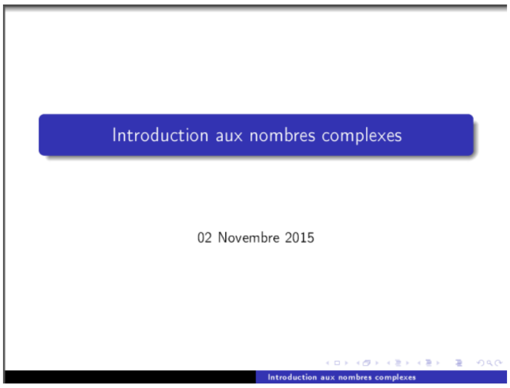
DEBUT DU COURS	COEUR DU COURS	FIN DU COURS
Durée : 15 minutes Activité : - interrogation sur le dernier cours Non - correction exercices (écrit ? oral?) Non Exemple-exercice sur les notions vues au cours précédent.	~~Cours~~ / Exercices / ~~TICE~~ / ~~Méta~~ Phase de Recherche Ecrit ~~/ Oral~~ Durée : Quand quelques-uns ont réussi l'exercice ou l'ont corrigé. Observations : Les élèves sont autorisés à s'entraider et à échanger leurs idées. Utilisation de la calculatrice encouragée.	Travail à la maison ? NON Calcul mental en fin de séance. Fin du cours anticipée
Rituel de début de cours : le prof accueille les élèves un par un et met une bonne ambiance. Quand la 2ème sonnerie retentit il demande le calme et le cours commence.	~~Cours~~ / Exercices / ~~TICE~~ / ~~Méta~~ Phase de Correction ~~Ecrit~~ / Oral Point important écrit au tableau Durée : Très court Observations : La correction est rapide mais un corrigé est déposé sur internet en fin de cours.	
- Mobilité du prof dans la salle - Comment sont introduits les nouveaux chapitres ? (exos, activités, exemples?) Exemples - Comment sont gérées les questions des élèves ? - Adaptation du prof en fonction de l'ambiance de la classe ? Oui - Temps pris par la discipline 0 très bonne ambiance - Le prof fait-il intervenir les élèves ? Interactivité ? Beaucoup - Comment sont faites les transitions ? - Temps laissé pour réfléchir à un exo ? - Rythme différent lorsque la notion est complexe ? Oui - Utilisation du discours Méta Non	Cours / Exercices / TICE / Méta Ecrit / Oral Durée : Observations : Cours / Exercices / TICE / Méta Ecrit / Oral Durée : Observations :	**Observations, remarques générales :** Gestion des questions : → Si juste pour un élève le professeur répond rapidement → si c'est une question relative à un problème déjà rencontré il prend plus de temps → il faut recommencer jusqu'à ce que tout le monde ait compris.

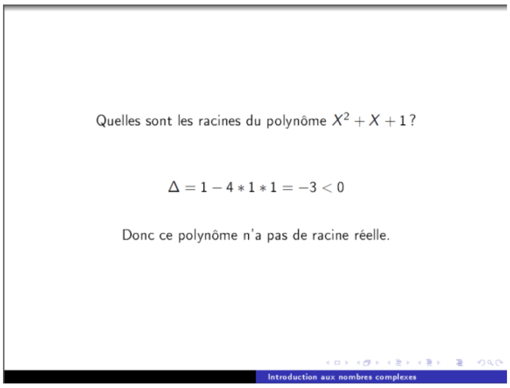
Annexe F : Grille d'observation sur la gestion du temps et le rythme du cours remplie en seconde

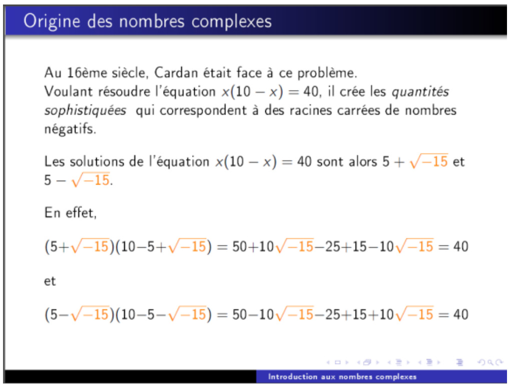
Date : 02/11/2015 de 14H à 15H
Classe : secondes
Observation : Gestion du temps, rythme du cours

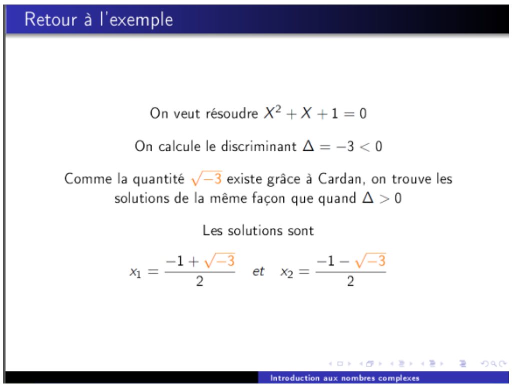
DEBUT DU COURS	COEUR DU COURS	FIN DU COURS
Durée : quelques minutes Activité : - interrogation sur le dernier cours - correction exercices (écrit ? oral?) Rappels de définitions vues la semaine précédente. Revient sur les erreurs fréquentes et les points importants.	Cours / ~~Exercices / TICE / Méta~~ ~~Ecrit /~~ Oral Points importants écrits au tableau Durée : polycopié projeté sur TNI. Observations : Début du cours sur un exemple pour introduire la nouvelle notion puis après introduction retour sur des exemples similaires.	Travail à la maison ? OUI à l'oral Calcul mental en fin de cours Fin du cours anticipée
~~Accueil des élèves~~ en essayant de fermer les cahiers	Cours ~~/ Exercices / TICE / Méta~~ Courte phase recherche Ecrit ~~/ Oral~~ sur un exemple. Durée : Observations : Les élèves ne réussissent pas à refaire ce qu'ils viennent de voir en cours - exemple. Le professeur le fait avec eux	
- Mobilité du prof dans la salle - Comment sont introduits les nouveaux chapitres ? (exos, activités, exemples?) Exemples - Comment sont gérées les questions des élèves ? Comme en TS - Adaptation du prof en fonction de l'ambiance de la classe ? Oui - Temps pris par la discipline → quelques minutes les élèves sont dissipés - Le prof fait-il intervenir les élèves ? Interactivité ? Beaucoup - Comment sont faites les transitions ? Exemple - Temps laissé pour réfléchir à un exo ? Très court - Rythme différent lorsque la notion est complexe ? - Utilisation du discours Méta Non	Cours ~~/ Exercices / TICE / Méta~~ Le professeur reud Ecrit / Oral le même type d'exemple. Durée : Seconde phase recherche TRÈS COURTE. Observations : Cette fois les élèves ont compris. Un élève corrige rapidement au tableau. Cours ~~/ Exercices / TICE / Méta~~ Introduction d'une Ecrit / Oral deuxième notion mais plus Durée : de temps pour faire un Observations : exemple.	**Observations, remarques générales :** Les élèves sont assez faibles, ils ont beaucoup de mal à comprendre les nouvelles notions et ils ont des lacunes. Le professeur donne le même type d'exemple jusqu'à ce qu'ils aient tous compris.

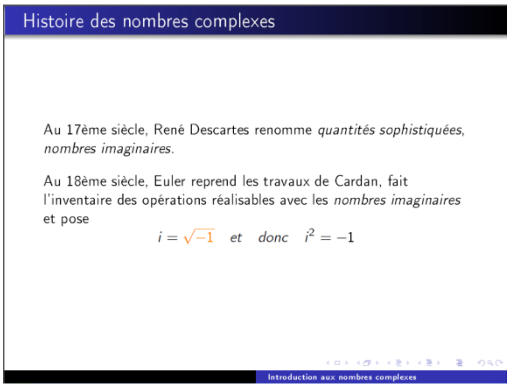
Annexe G : Introduction et début du cours sur les nombres complexes préparés ensemble

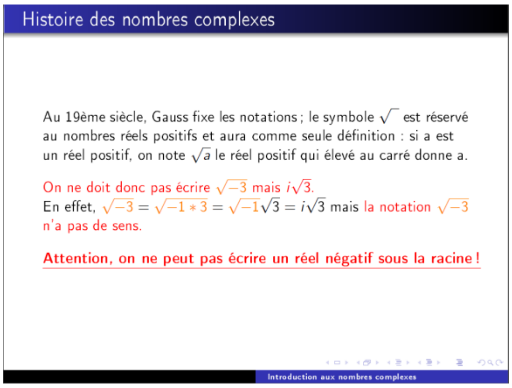


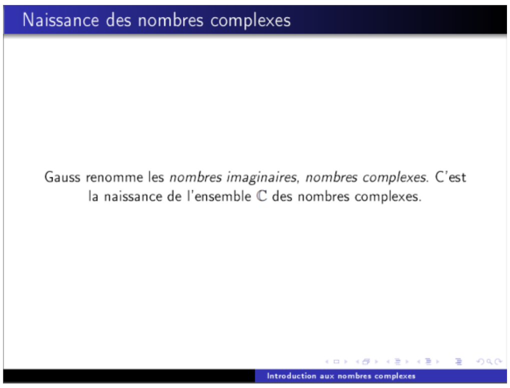


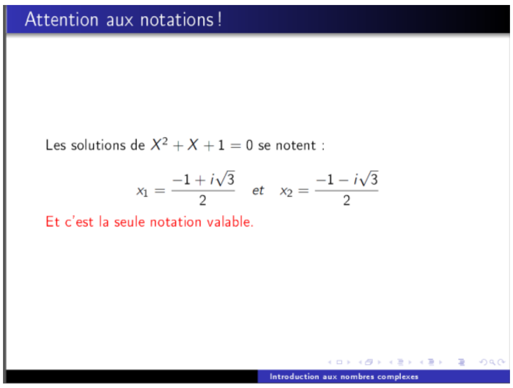












Utilité des nombres complexes

Les nombres complexes sont utiles dans plusieurs domaines :

- Mathématiques : résolution d'équations, géométrie
- Physique : mécanique, électricité, électronique, ondes
- Sciences pour l'ingénieur : facilite les calculs

Définitions

Définition : nombre complexe

Un *nombre complexe* est un nombre de la forme $a+ib$ où a et b sont deux nombres réels.
On a alors pour tout z nombre complexe, $z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Définition : partie réelle/imaginaire

a est appelé *partie réelle de z* et b *partie imaginaire*.
On note $a = \Re e(z)$ et $b = \Im m(z)$.

On remarque que si $b = 0$, $z = a + i * 0 = a \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Définition : imaginaire pur

Si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit alors que z est un *imaginaire pur* et on note $z \in i\mathbb{R}$.

Théorème (admis)

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ où a et b sont des réels.
Cette écriture est appelée *forme algébrique* d'un nombre complexe.

Conséquences

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire

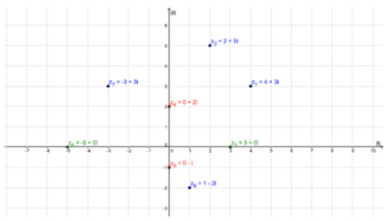
$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \quad et \quad b = b'$$

- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad et \quad b = 0$$

Représentation graphique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe. Alors il existe deux réels a et b tels que $z = a + ib$. On peut représenter z dans le plan par le point de coordonnées (a,b).



Définition : Affixe d'un point et image d'un complexe

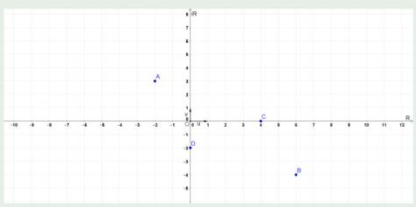
- A tout nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ est associé le point M de coordonnées (a,b) appelé *image* de z et noté $M(z)$
- A tout point M de coordonées (a,b) est associé le nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ appelé *affixe* de M

Définition : module

Soit z un nombre nombre complexe d'image M. On appelle *module* de z et on note $|z|$ la longueur OM.

Exemple

Placer sur le graphique les nombres complexes : $z_1 = -1 + 3i$; $z_2 = 4 - 5i$; $z_3 = 2$; $z_4 = 2i$



Quelle est l'image de chaque point ?
$M(z_1) = (-1, 3)$; $M(z_2) = (4, -5)$; $M(z_3) = (2, 0)$; $M(z_4) = (0, 2)$

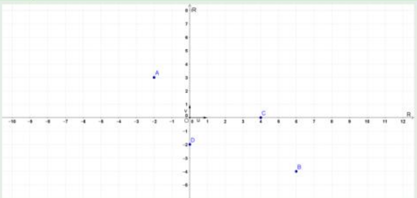
Exemple

$z_1 = -1 + 3i$; $z_2 = 4 - 5i$; $z_3 = 2$; $z_4 = 2i$

Quel est le module de chaque point ?

$|z_1| = |-1 + 3i| = \sqrt{(0-1)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{10}$
$|z_2| = 2\sqrt{2}$; $|z_3| = 2$; $|z_4| = 2$

Exemple



Quelles sont les affixes des points A, B, C, D ?

$z_A = -2+3i$; $z_B = 6-4i$; $z_C = 4$; $z_D = -2i$

Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs images sont égales

Conjugué d'un nombre complexe

Définition : conjugué

Si $z = a+ib$, le nombre complexe $a-ib$ est appelé *conjugué de z* et est noté $\bar{z}$.

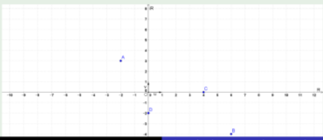
Exemple

$z_A = -2+3i$; $z_B = 6-4i$; $z_C = 4$; $z_D = -2i$

Quel est le conjugué de chaque point ?

$\bar{z}_A = -2-3i$; $\bar{z}_B = 6+4i$; $\bar{z}_C = 4$; $\bar{z}_D = 2i$

Placer ces points sur le plan



Opérations avec les nombres complexes

Somme et produit

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors il existe a_1, a_2, b_1, b_2 des nombres réels tels que $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

On a alors

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Opérations avec les nombres complexes

Inverse

Théorème

Pour tout nombre complexe non nul z, il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = z'z = 1$.

Ce nombre complexe z' est appelé *inverse* de z et noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe non nul.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Donc

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Exercice

Calculer

$(3+5i)+(7+3i)$

$(4+8i)*(\pi+9i)$

$(2-i\sqrt{3})^2$

$(1+2i)^2$

$(4-2i)*(4+2i)$

$(a+ib)*(a-ib)$ Que remarquez vous dans ce cas ?

$\frac{1}{2-3i}$

On peut alors remarquer grâce à l'exemple que

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z\bar{z} \geq 0$$

On a alors l'existence de la quantité $\sqrt{z\bar{z}}$, qu'on appelle *module de z* et qu'on note $|z|$.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Propriétés du conjugué

Théorème

Soit z un nombre complexe,

- $z\bar{z} = \Re e(z)^2 + \Im m(z)^2$ est un nombre réel
- $z + \bar{z} = 2\Re e(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\Im m(z)$

Théorème

- Un nombre complexe z est un réel si et seulement si $z = \bar{z}$
- Un nombre complexe z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

Polycopié de cours que nous leur avons distribué :

Les nombres complexes

Introduction aux nombres complexes

Nous allons nous intéresser aux racines du polynôme $X^2 + X + 1$.

1) Calcul du discriminant :

2) Ce polynôme a t-il des racines réelles ?

Au 16ème siècle, Cardan (mathématicien italien) était face à ce problème.
Voulant résoudre l'équation $x(10 - x) = 40$, il crée les quantités sophistiquées qui correspondent à des racines carrées de nombres négatifs. On suppose donc maintenant que les racines carrées de nombres négatifs existent.
Les solutions de l'équation $x(10 - x) = 40$ sont alors $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$
Comment le vérifier ?

3) Comme grâce à Cardan les racines carrées de nombres négatifs existent calculer les racines du polynôme $X^2 + X + 1$ de la même façon que lorsque $\Delta > 0$.

Au 17ème siècle, Descartes renomme les quantités sophistiquées, nombres imaginaires.
Au 18ème siècle, Euler fait l'inventaire des opérations réalisables avec les nombres imaginaires et pose :

$$\boxed{\mathbf{i = \sqrt{-1} \text{ et donc } i^2 = -1}}$$

Au 19ème siècle, Gauss fixe les notations : le symbole $\sqrt{\ }$ est, depuis Gauss, réservé aux nombres réels positifs et aura comme seule définition : si a est un réel positif, on note $\sqrt{a}$ le réel positif qui élevé au carré donne a.
On ne doit donc pas écrire $\sqrt{-3}$ mais $i\sqrt{3}$
En effet, $\sqrt{-3} = \sqrt{-1 * 3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}$
Attention, on ne peut plus écrire un réel négatif sous la racine ! Il faut maintenant utiliser la notation avec le i.
Gauss renomme les nombres imaginaires, nombres complexes.

C'est la naissance de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

4) Ecrire les solutions trouvées questions 3 avec les bonnes notations

1

I Forme algébrique d'un nombre complexe

1) Définitions

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Définition : nombre complexe
Un nombre complexe est un nombre de la forme $a + ib$
où a et b sont deux nombres réels
et i est un nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.

Définition : Partie réelle / Partie imaginaire
- Le réel a est appelé la partie réelle de z et notée $Re(z)$.
- Le réel b est appelé la partie imaginaire de z et notée $Im(z)$.

Cas particuliers :
- Si $b = 0$ alors $z = a + i * 0 = a = Re(z)$ donc z est un nombre réel.
  On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Si $a = 0$ alors $z = ib = iIm(z)$. On dit que z est un imaginaire pur.

Théorème (admis)
Tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** $z = a + ib$ où a et b sont des réels.
Cette écriture est appelée la **forme algébrique** du nombre complexe z.

Conséquences
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
  C'est à dire : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$
- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux nulles.
  C'est à dire : $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

Exemple :
1 est un nombre réel
i est un imaginaire pur.
$1 + i$ est un nombre complexe de partie réelle 1 et de partie imaginaire 1.
$5 - 2i$ est un nombre complexe de partie réelle 5 et de partie imaginaire $-2i$.

2) Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Pour tout point M du plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on peut écrire de manière unique $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$

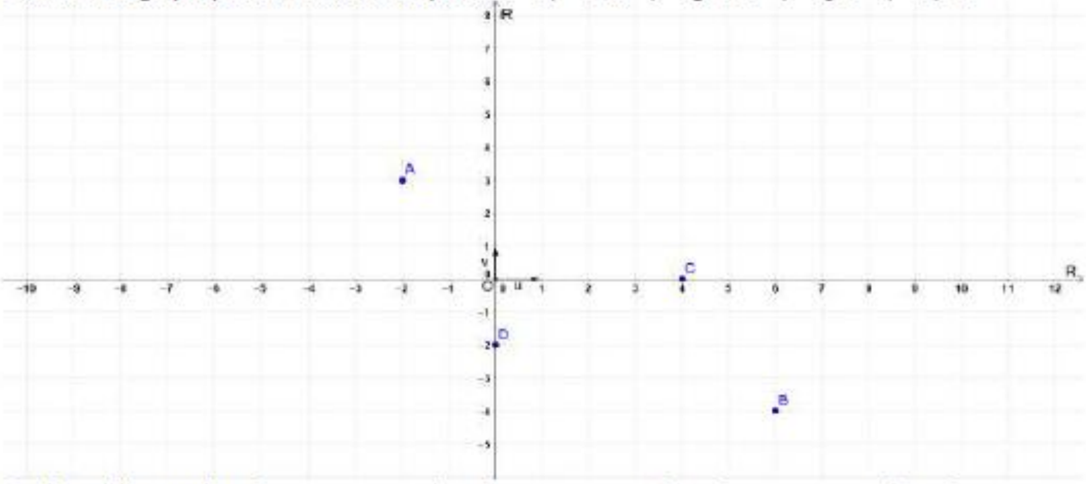
Tout nombre complexe peut s'écrire $z = a + ib$ avec a et b deux réels
On peut représenter z dans le plan par le point de coordonnées (a,b).

L'axe des abscisses représente l'ensemble des réels et l'axe des ordonnées représente l'ensemble des imaginaires purs.

Définition : Affixe d'un point et image d'un complexe
- A tout nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ est associé le point M de coordonnées $(a; b)$ appelé image de z et noté $M(z)$.
- A tout point M de coordonnées $(a; b)$ est associé le nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ appelé affixe de M.

Définition : module d'un complexe
Soit z un nombre complexe d'image M .On appelle module de z et on note $|z|$ la longueur OM

Exemple:
Placer sur le graphique les nombres complexes : $z_1=-1+3i$, $z_2=4-5i$, $z_3=2$, $z_4=2i$



Quelle est l'image de z_1 ? de z_2 ? de z_3 ? de z_4 ?

Calculez le module de z_1, z_2, z_3 et z_4 :

$|z_1|= |-1 + 3i| =$

$|z_2|= | 4 - 5i| =$

$|z_3|= |2| =$

$|z_4|= |2i| =$

Soient les points A, B, C, D de coordonnées : $A(-2;\ 3)$ $B(6;\ -4)$ $C(4;\ 0)$ $D(0;-2)$
Quel est l'affixe de A ? de B ? de C ? de D ?

Théorème
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs images sont égales.

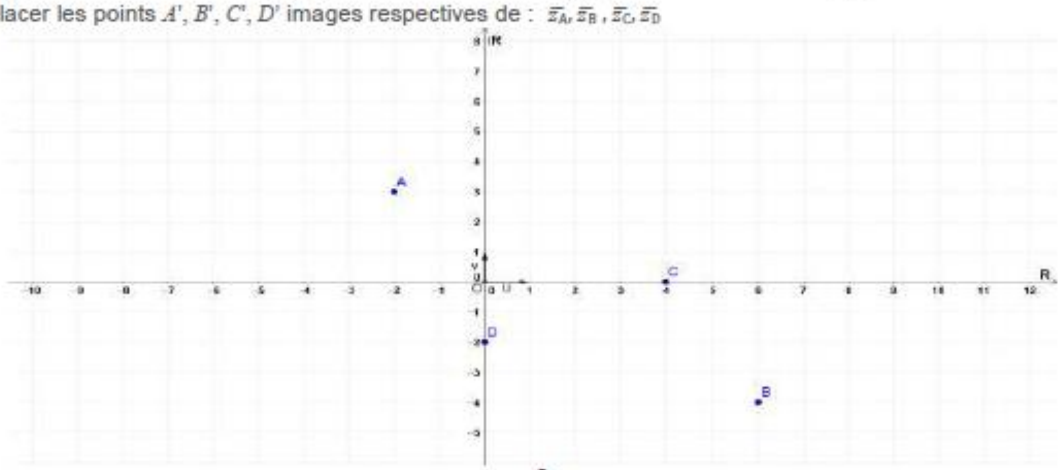
3) Conjugué d'un nombre complexe

Définition : conjugué d'un nombre complexe
Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels est le nombre complexe $a - ib$ noté $\bar{z}$.

Exemple :
Soient z_A, z_B , z_C , z_D les affixes respectives des points A,B,C,D de l'exemple précédent.
Déterminer les conjugués de : z_A, z_B , z_C , z_D

$\overline{z_A} =$ $\overline{z_B} =$ $\overline{z_C} =$ $\overline{z_D} =$

Placer les points A', B', C', D' images respectives de : $\overline{z_A}$, $\overline{z_B}$, $\overline{z_C}$, $\overline{z_D}$



3

Remarque : $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$
Si M est l'image de z et M' est l'image de $\bar{z}$ alors les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite $(O, \vec{u})$

II Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

On effectue les calculs comme dans $\mathbb{R}$, et on remplace i^2 par -1.

1) Somme :

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$
Alors $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

Preuve : $z_1+z_2 = a_1+ib_1+a_2+ib_2 = a_1 + a_2+ib_1+ib_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

2) Produit :

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$
Alors $z_1 z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

Preuve : $z_1z_2 = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = a_1a_2+a_1ib_2+ib_1a_2+ib_1ib_2 = a_1 a_2 + i(a_1b_2+a_2b_1) + \underbrace{i^2}_{-1} b_1b_2$

3) Inverse :

Théorème-Définition : Inverse d'un nombre complexe
Pour tout nombre complexe non nul z il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = z'z = 1$.
Ce nombre complexe z' est appelé inverse de z et noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}

Méthode pour calculer l'inverse de z :
Pour ne plus avoir de nombre imaginaire au dénominateur : on multiplie par le nombre conjugué au numérateur et dénominateur pour faire apparaître l'identité remarquable $a^2 + b^2$ au dénominateur.

Soit z = a + ib un nombre complexe non nul.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 \underbrace{-iab + iab}_{0} - \underbrace{\underbrace{i^2}_{-1} b^2}_{+1}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Donc

$$\frac{1}{z} = \underbrace{\frac{a}{a^2 + b^2}}_{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)} + i\underbrace{\left(-\frac{b}{a^2 + b^2}\right)}_{\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

Exercice : Calculer :

$(3 + 5i) + (7 + 3i) =$

$(4 + 8i) \times (\pi + 9i) =$

$(2 - i\sqrt{3})^2 =$

$(1 + 2i)^2 =$

$(4 - 2i) \times (4 + 2i) =$

$(a + ib) \times (a - ib) =$

Que remarquez-vous dans ce cas ?

$\frac{1}{2 - 3i} =$

Nous avons remarqué qu'il existe une nouvelle identité remarquable :

$$z\bar{z} = \underbrace{a}_{Re(z)}{}^2 + \underbrace{b}_{Im(z)}{}^2 \in \mathbb{R} \qquad et \qquad z\bar{z} \geq 0$$

Définition : module d'un nombre complexe (suite)

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4) Propriétés

Théorème :

$$z\bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 \text{ est un nombre réel}$$

Preuve : $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 \underbrace{-iab + iab}_{0} - \underbrace{\underbrace{i^2}_{-1}}_{+1} b^2 = \underbrace{a}_{Re(z)}{}^2 + \underbrace{b}_{Im(z)}{}^2$

Théorème :

$z + \bar{z} = 2Re(z)$

$z - \bar{z} = 2iIm(z)$

Preuve : Si z=a+ib avec a et b réels

$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z)$

$z - \bar{z} = a + ib - (a - ib) = a + ib - a + ib = 2ib = 2iIm(z)$

Théorème :

- Un nombre complexe z est un nombre réel si et seulement si $z = \bar{z}$
- Un nombre complexe z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

Preuve : Si z=a+ib avec a et b réels

$z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2iIm(z) = 0 \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \text{ est un nombre réel}$

$z = -\bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2Re(z) = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow z \text{ est un imaginaire pur}$

III Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$

Si les trois nombres sont réels $\mathrm{P(x)} = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racines de P(x)	Pas de racine dans $\mathbb{R}$ Mais deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$: $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	Une racine « double » dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Annexe H : Début du cours sur les limites de fonctions préparé ensemble

Limite d'une fonction

09 Novembre 2015

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n+1$$

Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$?

Pour tout intervalle $]A;+\infty[$,

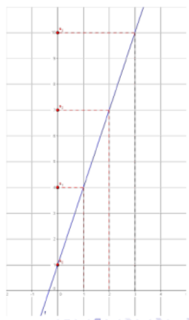
$u_n \in]A;+\infty[$ dès que $n \in]\frac{A-1}{3};+\infty[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si on définit la fonction f telle que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x+1$

Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

On va s'intéresser à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.



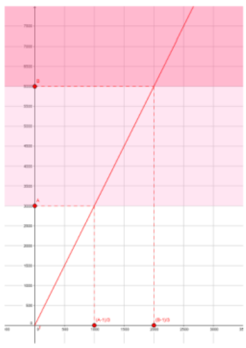
On considère une fonction f définie sur un intervalle $]a;+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$. On note C_f sa représentation graphique.

Définition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut en rendant x assez grand.

On dit que la suite $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle $]A;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



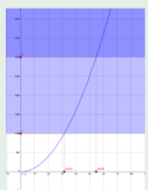
Exemple 1

On pose pour tout $x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = x^2$

Quelle est la limite de g(x) quand $x \to +\infty$?

Pour tout intervalle $]A;+\infty[$, pour avoir $x^2 \in]A;+\infty[$ il suffit d'avoir $x \in]\sqrt{A};+\infty[$.

Donc pour tout x assez grand, tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$contient $f(x)$.



Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 2

On pose $h(x) = \sqrt{10x-8}$

Quel est l'ensemble de définition de h ? h est définie sur $[\frac{4}{5};+\infty[$

Quelle est la limite de h(x) quand $x \to +\infty$?

Pour tout intervalle $]A;+\infty[$, pour avoir $h(x) \in]A;+\infty[$ il suffit d'avoir $x \in]\frac{A^2+8}{10};+\infty[$.

Donc pour tout x assez grand, tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$contient $h(x)$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

On a vu jusque maintenant des fonctions croissantes, et si la fonction est décroissante ?

Par exemple, quelle est la limite de la fonction f définie par :

$$\text{Pour tout } x \in]0,+\infty[, \; f(x) = -3x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Définition : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Dire que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que $f(x)$ devient aussi petit que l'on veut en rendant x assez grand.

On dit que la suite $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

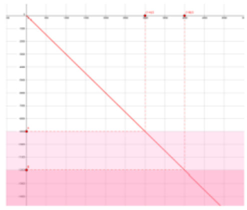
On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

On pose pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\quad f(x) = -3x + 1$

Quelle est la limite de f(x) quand $x \to +\infty$?

Pour tout intervalle $]-\infty; A[$, pour avoir $f(x) \in]-\infty; A[$, il suffit d'avoir $x \in]\frac{1-A}{3}; +\infty[$.

Donc pour tout x assez grand, tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient $f(x)$.



Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Exemple 3

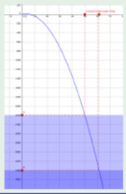
On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = -x^2 + 6x + 4$

Quel est le signe de g ?
si on note x_1 et x_2 les racines de g, on peut supposer que $x_1 < x_2$, et on a que g est négative pour tout $x \in [x_2, +\infty[$.

Quelle est la limite de g(x) quand $x \to +\infty$?

Pour tout intervalle $]-\infty; A[$, on peut trouver un x suffisamment grand pour que $g(x) \in]-\infty; A[$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$



Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par :

$$v_n = \frac{3n-1}{n+2}$$

Quelle est la limite de (v_n) ?

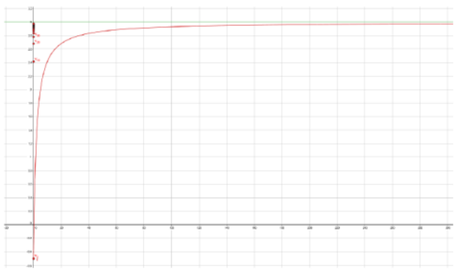
$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 3$$

Si on pose : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = f(n)$
Quel est l'ensemble de définition de f ? f est définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

Ici, on restreint f à l'intervalle $]0; +\infty[$ parce qu'on cherche la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$
et on a

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} f(n) = 3$$



Définition : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Dire que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que $f(x)$ devient aussi proche de l que l'on veut en rendant x assez grand.

On dit que la suite $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert $]l - A; l + A[$ contenant l contient $f(x)$ pour x assez grand.

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

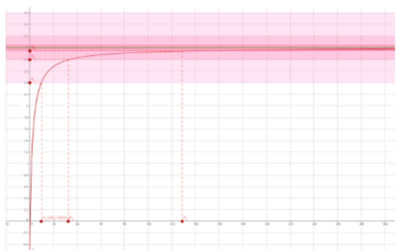
On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

Quelle est la limite de f(x) quand $x \to +\infty$?

Pour tout intervalle $]A; 3]$, pour avoir $f(x) \in]A; 3]$, il suffit d'avoir $x \in]\frac{2A+1}{3-A}; +\infty[$

Donc pour tout x suffisamment grand, f(x) est aussi proche de 3 que l'on veut.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$



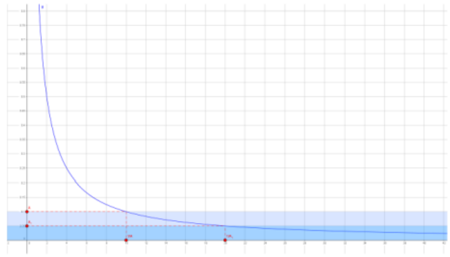
On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Quelle est la limite de g(x) quand $x \to +\infty$?

Pour tout intervalle $]0; A[$, pour avoir $g(x) \in]0; A[$, il suffit d'avoir $x \in]\frac{1}{A}; +\infty[$

Donc pour tout x suffisamment grand, g(x) est aussi proche de 0 que l'on veut.

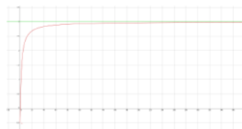
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$



Définition : Asymptote horizontale

Lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage $+\infty$. On parle d'asymptote horizontale.

La courbe C_f se rapproche de la droite d'équation $y = l$.



On s'est intéressé à la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ pour une fonction f définie sur un intervalle $]a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

Pour une fonction g définie sur un intervalle $]-\infty; b[$ où $b \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à la limite de $g(x)$ quand $x \to -\infty$.

Définition : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

Dire que $g(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ signifie que $g(x)$ devient aussi petit que l'on veut en rendant x assez petit.

On dit que $g(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty; A[$ contient $g(x)$ pour x assez petit.

On écrit $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

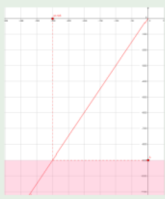
Exemple 4

On pose pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f(x) = 3x + 1$
Quelle est la limite de f(x) quand $x \to -\infty$?

Pour tout intervalle $]-\infty; A[$,
pour avoir $f(x) \in]-\infty; A[$,
il suffit d'avoir $x \in]-\infty; \frac{A-1}{3}[$.

Donc pour tout x assez petit,
tout intervalle de la forme
$]-\infty; A[$ contient $f(x)$.

Donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Exemple 5

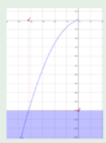
On pose, pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $g(x) = -x^2 + 6x + 4$

Quel est le signe de g ?
si on note x_1 et x_2 les racines de g, on peut supposer que $x_1 < x_2$, et on a que g est négative pour tout $x \in]-\infty, x_1]$.

Quelle est la limite de g(x) quand $x \to -\infty$?

Pour tout intervalle $]-\infty; A[$,
on peut trouver un x
suffisamment petit pour que
$g(x) \in]-\infty; A[$.

Donc $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$



Définition : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

Dire que $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ signifie que $g(x)$ devient aussi grand que l'on veut en rendant x assez petit.

On dit que $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle $]A; +\infty[$ contient $g(x)$ pour x assez petit.

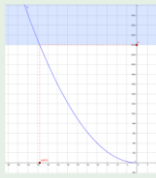
On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

Exemple 6

On pose pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $h(x) = x^2$
Quelle est la limite de h(x) quand $x \to -\infty$?

Pour tout intervalle $]A; +\infty[$, pour avoir $h(x) \in]A; +\infty[$, il suffit d'avoir $x \in]-\infty; -\sqrt{A}[$.

Donc pour tout x assez petit, tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$contient $h(x)$.



Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

Définition : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = l$

Dire que $g(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$ signifie que $g(x)$ devient aussi proche de l que l'on veut en rendant x assez petit.

On dit que $g(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert $]l - A; l + A[$ contenant l contient $g(x)$ pour x assez petit.

On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = l$.

On pose, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $g(x) = \frac{1}{x}$

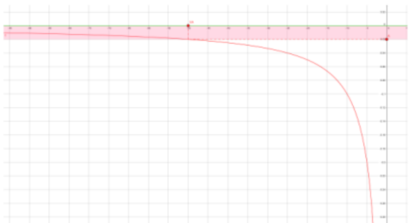
Quelle est la limite de g(x) quand $x \to -\infty$?

Pour tout intervalle $]-A; 0[$, pour avoir $g(x) \in]-A; 0[$, il suffit d'avoir $x \in]-\infty; -\frac{1}{A}[$

Donc pour tout x suffisamment petit, g(x) est aussi proche de 0 que l'on veut.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

On remarque que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe C_g au voisinage de $+\infty$.

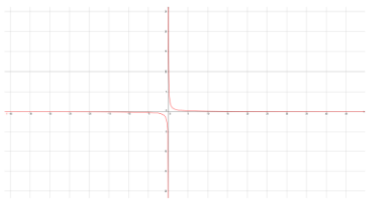


Limite en l'infini des fonctions usuelles

$x \mapsto f(x)$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
$x \mapsto x$	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	0	0
$x \mapsto \sqrt{x}$	pas définie pour $x < 0$	$+\infty$
$x \mapsto cos(x)$	pas de limite	pas de limite
$x \mapsto sin(x)$	pas de limite	pas de limite

On peut aussi avoir une limite en $a \in \mathbb{R}$

Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0 et donc on peut s'intéresser à $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$



On considère maintenant une fonction f définie sur un intervalle I avec $a \in I$ ou a est une borne de$I$. On note C_f sa représentation graphique.

Définition : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a signifie que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut en rendant x assez proche de a.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez proche de a.

On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Définition : $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Dire que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a signifie que $f(x)$ devient aussi petit que l'on veut en rendant x assez proche de a.

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle $]-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x assez proche de a.

On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 7

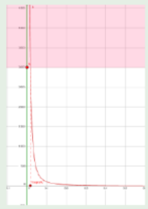
On pose pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\quad h(x) = \frac{1}{x^2}$

Quelle est la limite de h(x) quand $x \to 0$?

Pour tout intervalle $]A; +\infty[$,
pour avoir $h(x) \in]A; +\infty[$,
il suffit d'avoir $x \in]0; \frac{1}{\sqrt{A}}[$.

Donc pour tout x assez proche de 0, tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $h(x)$.

Donc $\quad \lim_{x \to 0} h(x) = +\infty$



Dans certain cas, la limite à droite et la limite à gauche n'est pas la même.

Par exemple, si on pose pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

Quelle est la limite de f(x) quand $x \to 0$ et $x > 0$?

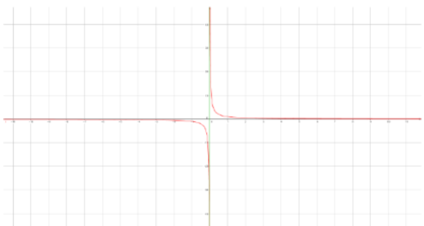
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

Quelle est la limite de f(x) quand $x \to 0$ et $x < 0$?

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

Défintion : Asymptote verticale

Lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe C_f. On parle d'asymptote verticale.



Définition : $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Dire que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a signifie que $f(x)$ devient aussi proche de l que l'on veut en rendant x assez proche de a.

On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert $]l - A; l + A[$ contenant l contient $f(x)$ pour x assez proche de a.

On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Exemple 8

On pose $f(x) = \frac{4x^2+3x-10}{4x-5}$

Quel est l'ensemble de définition de f ?
f est définie sur $]-\infty; \frac{5}{4}[\cup]\frac{5}{4}; +\infty[$

Quelle est la limite de f(x) quand $x \to \frac{5}{4}$?
$f(x) = \frac{4x^2+3x-10}{4x-5} = \frac{(x+2)(4x-5)}{4x-5}$ d'où, si $x \neq \frac{5}{4}$, alors $f(x) = x + 2$
et donc

$$\lim_{x \to \frac{5}{4}} f(x) = \frac{5}{4} + 2 = \frac{13}{4}$$

Quelle est la limite de f(x) quand $x \to +\infty$?

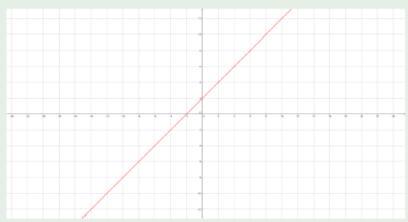
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Quelle est la limite de f(x) quand $x \to -\infty$?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple 8 suite

$f(x) = \frac{4x^2+3x-10}{4x-5}$



La courbe repésentative de f admet-elle une asymptote verticale/horizontale ? Non

<u>**Annexe I : Séance d'exercices sur les limites de fonctions préparée par Anne**</u>

Exercices : Limite d'une fonction

Exercice 1

Déterminer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement lorsque cela est possible.

1. $f(x) = -3x^3 + 5$
2. $g(x) = -5x^4 - 2x^2 + 3x + 8$
3. $h(x) = (3 - 5\sqrt{x})\sqrt{x}$
4. $i(x) = 7x^2 + 2x + \frac{5}{x}$
5. $j(x) = -x(\sqrt{x} - 2)$
6. $k(x) = \frac{5x+1}{x}$
7. $l(x) = \frac{-x^3+2x^2-x+10}{x^2}$
8. $m(x) = \frac{-6x^2+3x+1}{x^3}$
9. $n(x) = \frac{10x^5+9x^4+8x^3+7x^2+6x+5}{2x^5+3x^4+4x^3+2x+1}$
10. $o(x) = \frac{-x^2+3}{\sqrt{x}}$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes et interpréter graphiquement lorsque cela est possible.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1 - 2x + \frac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1 - 2x + \frac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{x}{5} + \frac{5}{x}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{x}{5} + \frac{5}{x}$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} -\frac{3}{1-x}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -\frac{3}{1-x}$
7. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x+1}{x-2}$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x+1}{x-2}$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1-x^2}{2-x}$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1-x^2}{2-x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3+x}{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x^2-6x-20}{2x+4}$
13. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^2-3x+2}{x^3+1}$
14. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{x^2-3x+2}{x^3+1}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{10x^5+9x^4+8x^3+7x^2+6x+5}{2x^5+3x^4+4x^3+2x+1}$
16. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x^2-6x+9}$

1

Exercice 3

g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a :

$$2x - 1 \leq g(x) \leq 2x$$

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

Exercice 4

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a :

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq 1$$

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Exercice 5

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a :

$$1 \leq f(x) \leq 2$$

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{2f(x) + 1}{x^2}$$

Démontrer que, pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{3}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{5}{x^2}$$

En déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

Exercice 6

Déterminer la limite de f en $+\infty$ dans chacun des cas suivant :

1. $f(x) = (2 - \sin x)x^2$
2. $f(x) = \frac{3x}{\cos x - 3}$

Exercice 7

Déterminer que pour tout réel $x \geq 1$, on a :

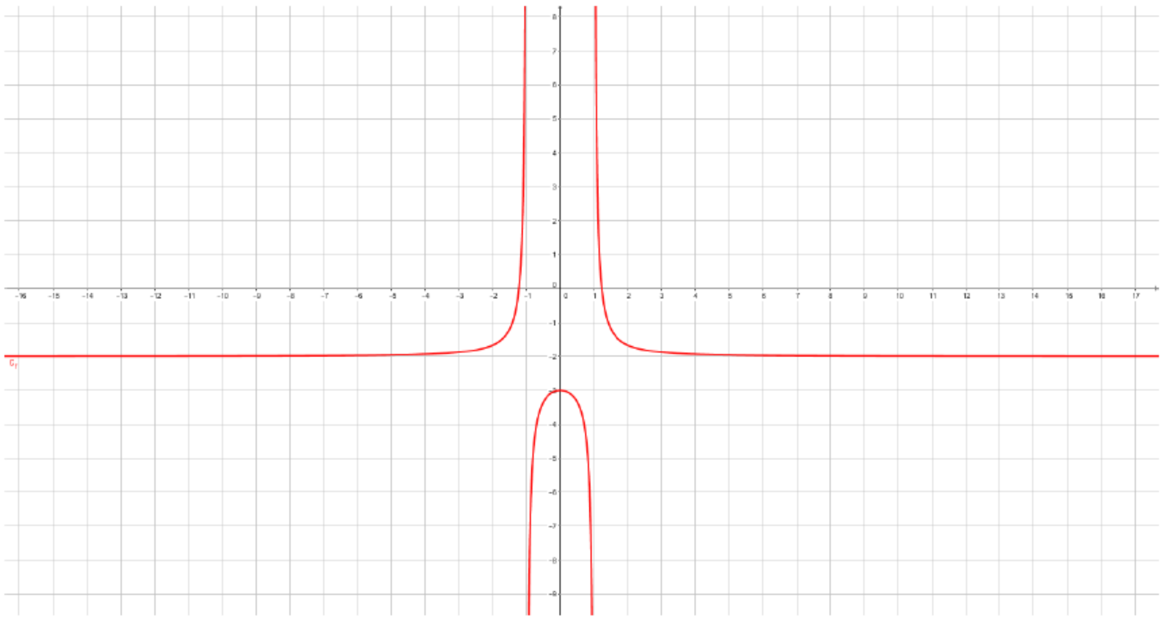
$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$$

En déduire les valeurs de :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$$

Exercice 8

f est une fonction dont on donne la courbe représentative C_f.



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer les limites de f.
3. C_f admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations.
4. Dans cette question, f est telle que

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x^2 - 1}$$

Etudier la position de C_f par rapport à son asymtote horizontale.

Exercice 9

On considère la fonction

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer les limites de la fonction f.
3. La courbe représentative de f, notée C_f, admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations et étudier la position de C_f par rapport à ses asymptotes horizontales.
4. Etudier les varations de f, puis dresser son tableau de variation.
5. Tracer C_f et ses asymptotes.

Annexe J : Cours et exercices sur la continuité préparés par Florence

23/11/2015 Terminales S

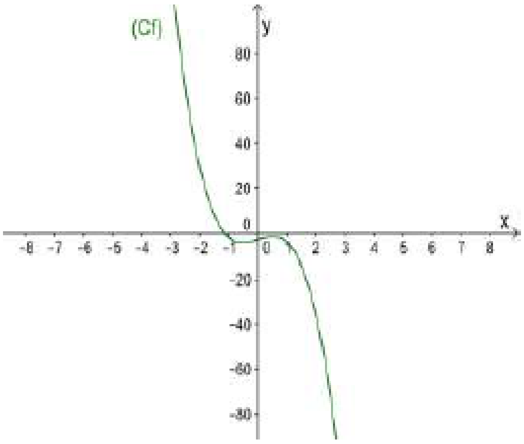
Continuité

I) Définition et propriétés

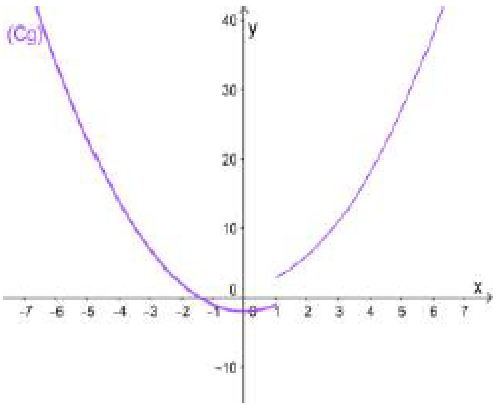
Définition : Fonction continue

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et (*Cf*) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
On dit que la fonction f est **continue** sur un intervalle I si le tracé de *(Cf)* s'effectue sans rupture.

Exemple de fonction continue :
Soit *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -5x^3 + 4x - 3$
dont on donne une représentation graphique ci-dessous :



Exemple de fonction discontinue :
Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si\ x \leq 1 \\ x^2 + 2 & si\ x > 1 \end{cases}$
dont on donne une représentation graphique ci-dessous :



Définition :

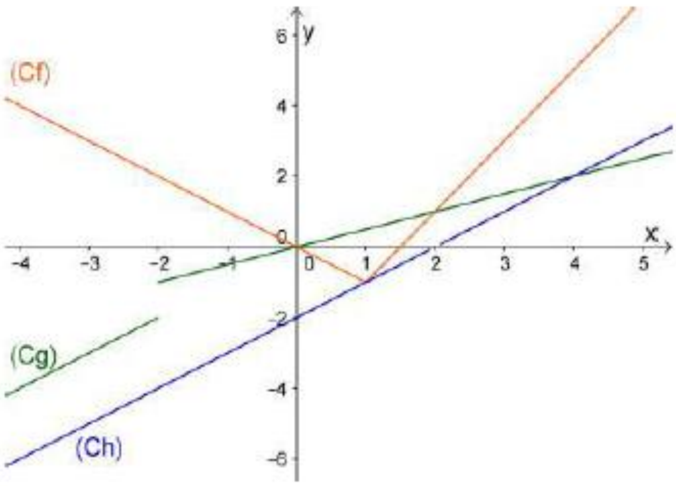
Soit a un réel appartenant à un intervalle I.
On dit que f est **continue en a** si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
On dit que f est **continue sur l'intervalle I**, si f est continue en tout a de I.

Exemples :

Soit *f*, *g*, et *h* des fonctions définies par :

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x < 1 \\ 2x-3 & si\ x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x & si\ x > -2 \end{cases} \qquad h(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2}$$

Déterminez à l'aide des représentations graphiques des fonctions *f*, *g* et *h* lesquelles sont des fonctions continues et lesquelles sont discontinues



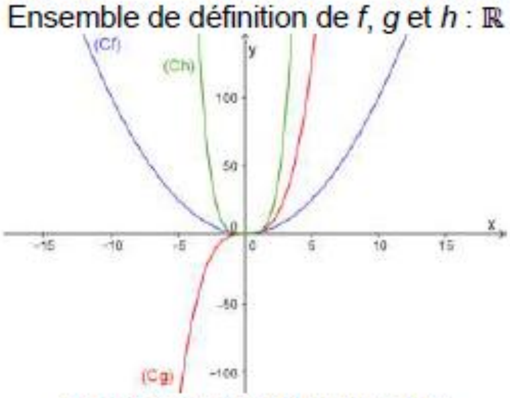
Propriété :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes), la fonction valeur absolue, la fonction racine carrée et les fonctions sinus et cosinus sont **continues sur leur ensemble de définition**.

<table>
<tr>
<td>

$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3 \quad h(x) = x^4$

Ensemble de définition de *f*, *g* et *h* : ℝ

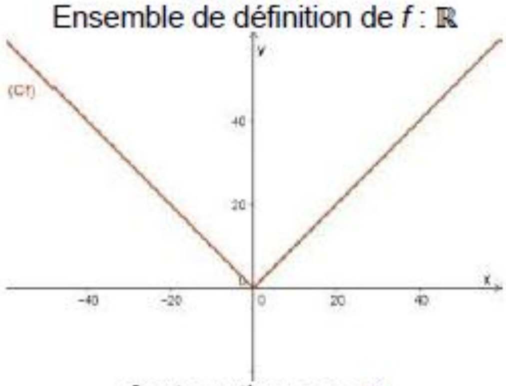


f, *g* et *h* sont continues sur ℝ

</td>
<td>

$f(x) = |x|$

Ensemble de définition de *f* : ℝ

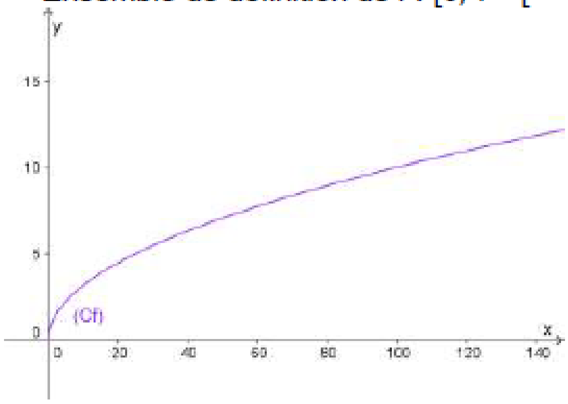


f est continue sur ℝ

</td>
</tr>
</table>

$f(x) = \sqrt{x}$

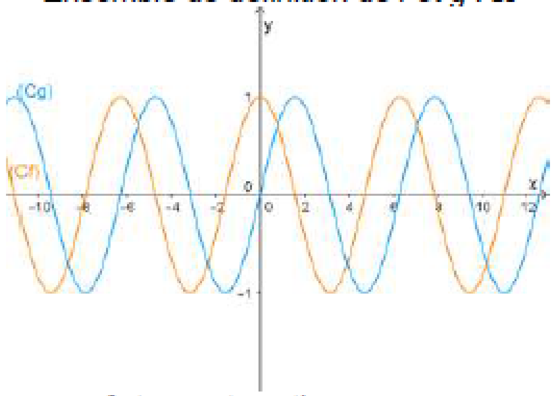
Ensemble de définition de f : $[0, +\infty[$



f est continue sur $[0, +\infty[$

$f(x) = \cos(x)$ $g(x) = \sin(x)$

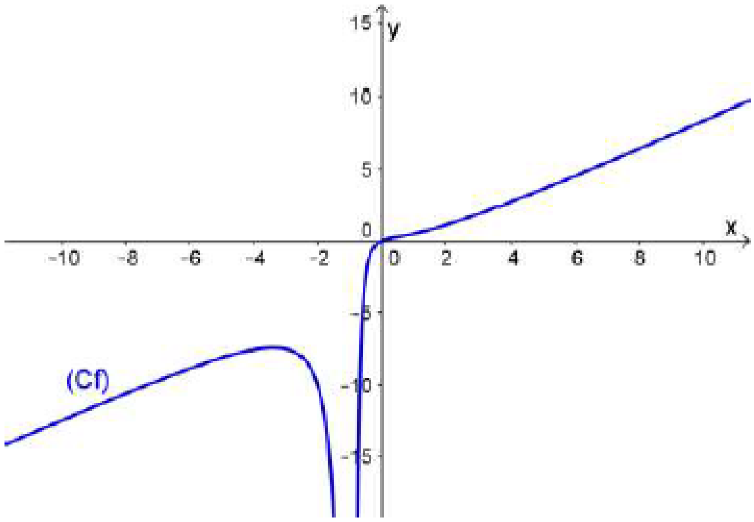
Ensemble de définition de f et g : $\mathbb{R}$



f et g sont continues sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 2x + 1}$$

Ensemble de définition de f : $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$



f est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$

Propriété :

La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues sont continues

Exemples :

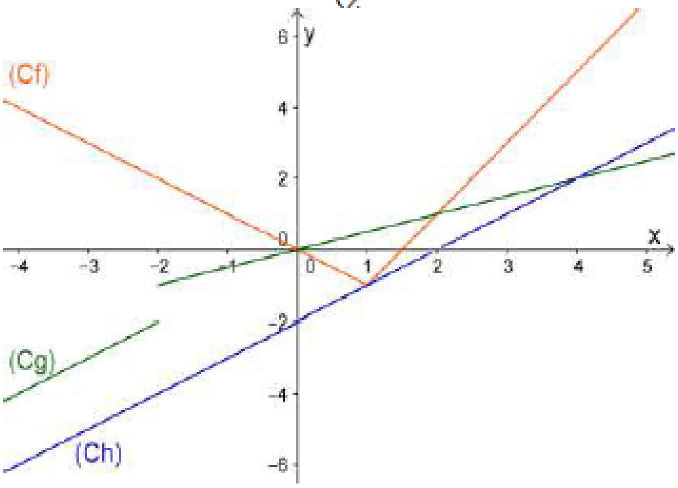
Justifiez la continuité des fonctions suivantes définies par :

$f(x) = x^2 + \cos(x)$ $g(x) = \sin(x) \times \sqrt{x}$ $h(x) = (x + x^2 + 5)^3$

Exemples :

Soit *f*, *g*, et *h* des fonctions définies par :

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x < 1 \\ 2x-3 & si\ x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x & si\ x > -2 \end{cases} \qquad h(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2}$$



Dites en justifiant quelles fonctions sont continues et sur quels intervalles et lesquelles ne le sont pas.

Propriété :

Si f est dérivable, alors elle est continue.

Attention ! La **réciproque** est **fausse** : Une fonction continue **n'est pas forcément** dérivable.

Exemple : $f(x) = |x|$ *f* est une fonction continue mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$

Remarque :

Dans un tableau de variations de fonction, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone** sur l'intervalle considéré.

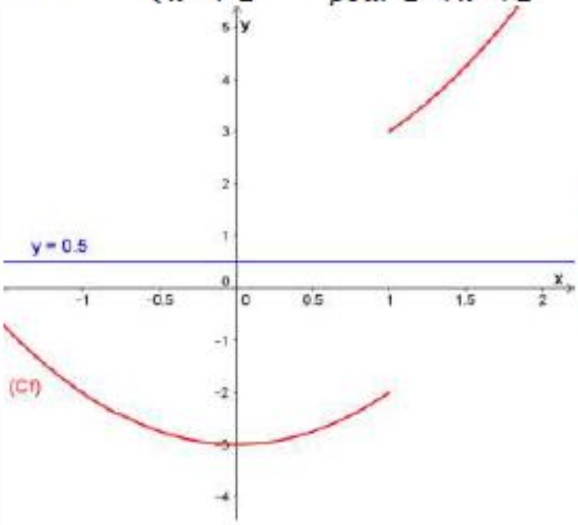
Exemple :

Le tableau de variation de la fonction carré ($f(x) = x^2$) signifie que la fonction carré est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et qu'elle est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

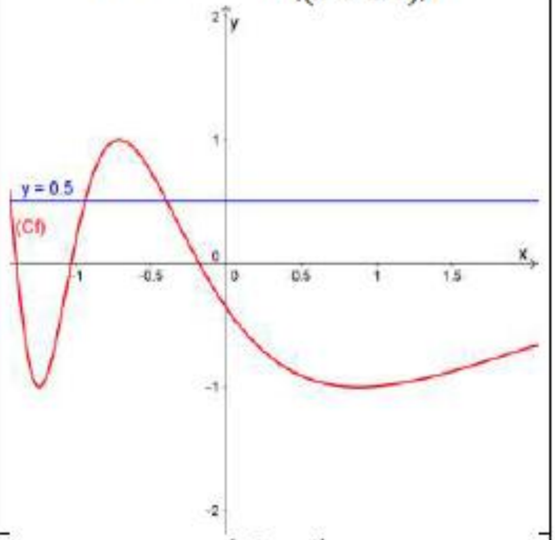
II) Théorème des valeurs intermédiaires

Voici des fonctions f_i définies sur l'intervalle [-1.5 , 2], on s'intéresse aux solutions de l'équation $f_1(x) = \frac{1}{2}$ pour x ∈ [-1.5 , 2].

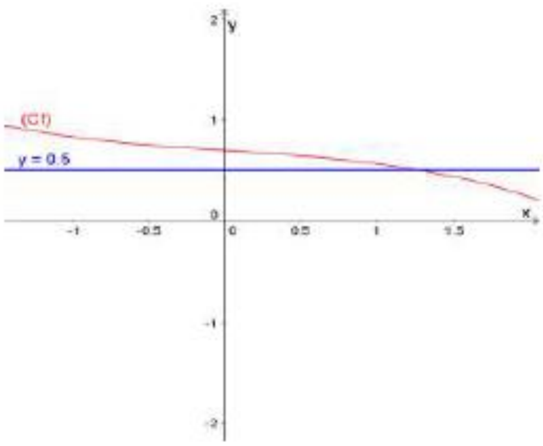
$$f_1 : x \to \begin{cases} x^2 - 3 & pour\ 1.5 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2 & pour\ 1 < x < 2 \end{cases}$$



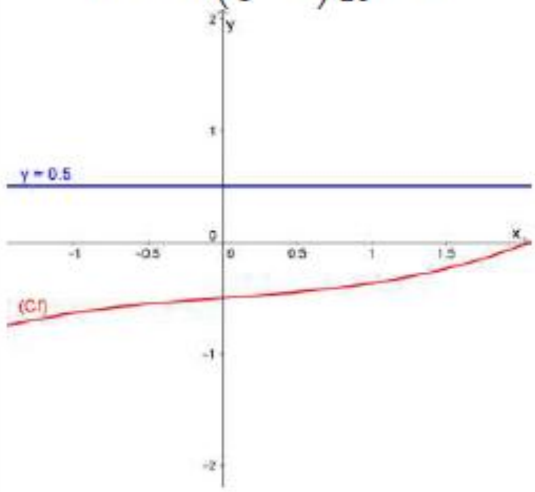
$$f_2 : x \to cos\left(\frac{10}{(x+2.3)}\right)$$



$$f_3 : x \to -\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\frac{1}{10} + 0.7$$

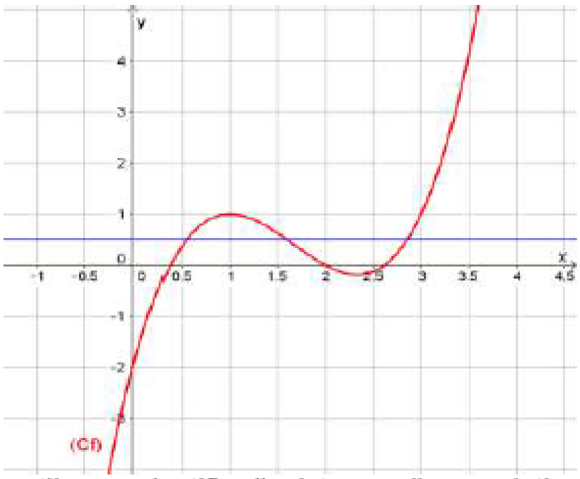


$$f_4 : x \to \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\frac{1}{10} - 0.5$$



Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

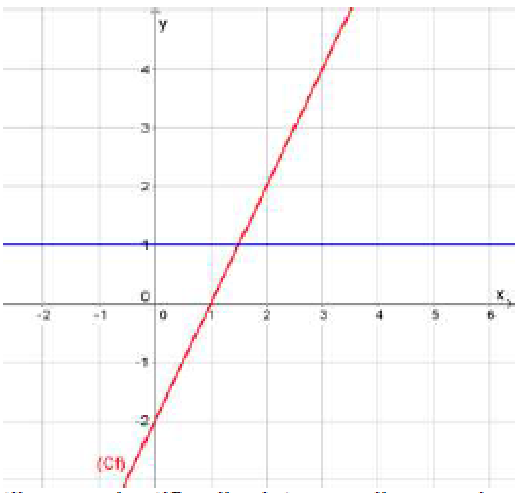
Si f est une fonction **continue** sur [a ; b] alors :
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe **au moins un** réel $c \in [a\,;b]$ tel que f(c) = k
Autrement dit, l'équation f(x) = k a au moins une solution sur [a ; b]



Ce théorème est très utile pour justifier l'existence d'une solution d'une équation.

Corollaire (Cas d'une fonction strictement monotone)

Si f est une fonction **continue et strictement monotone** sur [a ; b] alors :
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe **un unique** réel $c \in [a\,;b]$ tel que f(c) = k
Autrement dit, l'équation f(x) = k a une unique solution sur [a ; b]



Ce corollaire est très utile pour justifier l'existence d'une unique solution d'une équation.

Exercices Continuité

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 2x - 8$

1) Dressez le tableau de variation complet de g.
2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   c) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.
3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 5$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-1}$. C est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. (Unité graphique 2 cm).

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement les résultats.
2) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f et calculer sa fonction dérivée f'.
   b) Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $-4x^3 - 3x^2 - 2$.
3) On note g la fonction définie sur $]-\infty\,;1[$ par $g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$.
   a) Dresser le tableau des variations complet de g.
   b) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;1[$ et que α appartient à $[-1.2\,;-1.1]$.
   c) En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
4) En utilisant les résultats précédents, dressez le tableau des variations de f.
5) Ecrire une équation de la tangente Δ à C au point A d'abscisse 0. Etudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ.
6) Tracer Δ, C et ses asymptotes.

Annexe K : Début du cours annoté sur la fonction exponentielle préparé par Anne

La fonction exponentielle

Temps prévu : 15min
But : Faire découvrir l'exponentielle et sa croissance
Difficulté : Déterminer le terme général de la suite
Temps réel passé : 45min

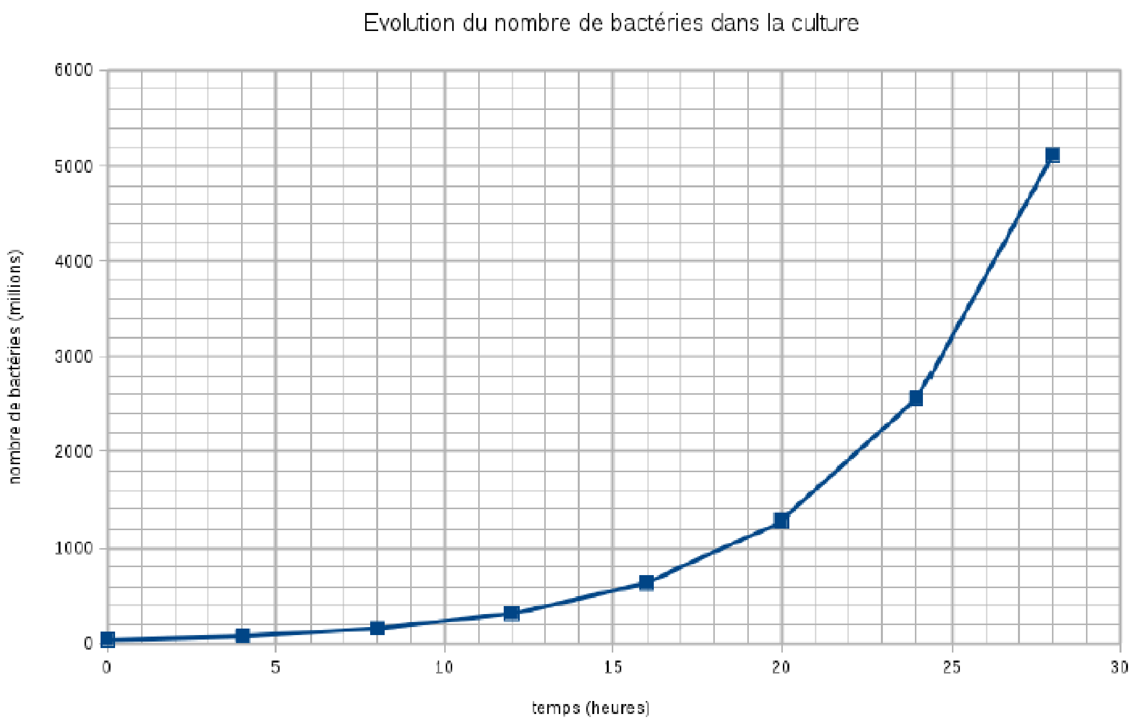
1 Introduction

1.1 Evolution de la taille d'une population de bactéries

On étudie l'évolution du nombre de bactéries dans une culture.

A l'instant $t = 0$, le nombre de bactéries dans la culture, en millions, est égal à $u_0 = 40$. On appelle u_n le nombre de bactéries dans la culture au bout de n heures, exprimé en millions.

On sait que le nombre de bactéries double toutes les quatres heures. Grâce à un tableur, on peut tracer l'évolution de la taille de la population.



On peut lire sur le graphique $u_{17} = 800$, $u_{21} = 1600$ et $u_{25} = 3200$.

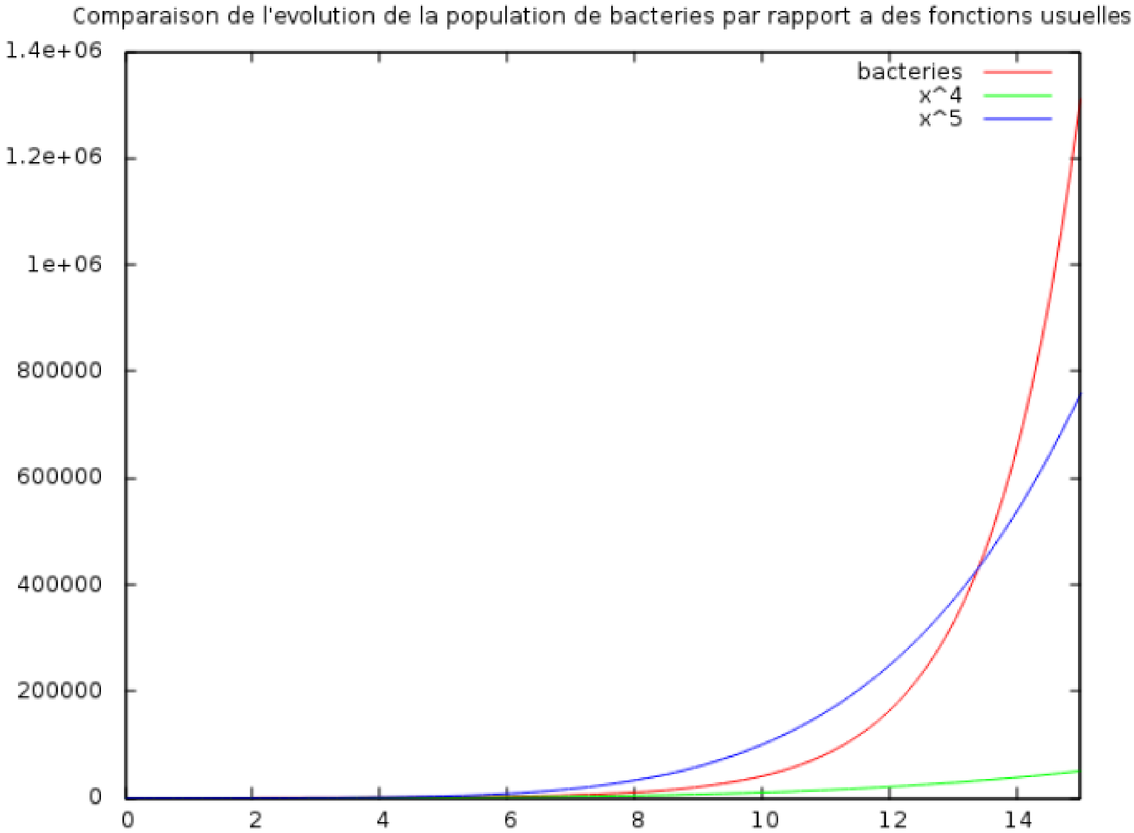
1

On a alors

$$u_{17} - u_{16} = 800 - 640 = 160$$
$$u_{21} - u_{20} = 1600 - 1280 = 320$$
$$u_{25} - u_{24} = 3200 - 2560 = 640$$

On remarque alors que, comme le nombre de bactéries dans la culture, le taux d'évolution du nombre de bactéries double toutes les 4 heures. **La suite des taux d'évolution et la suite u_n ont donc la même évolution.**

On peut aussi remarquer que la suite u_n croît beaucoup plus vite que les autres fonctions strictement croissantes connues.



1.2 La fonction exponentielle

Temps prévu : 20min
But : Donner la définition de la fonction exponentielle et démontrer son unicité (ROC)
Difficulté : Démonstration de l'unicité
Temps réel passé : 15min

Théorème-Définition 1.

Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à elle même telle que $f(0) = 1$.
On nomme cette fonction la fonction exponentielle et on la note exp
On note $e = \exp(1)$ et $e^x = \exp(x)$

Autrement dit, la fonction exponentielle vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f' & = & f \\ f(0) & = & 1 \end{cases}$$

Nous allons démontrer l'unicité d'une telle fonction. Pour cela, on a besoin de la propriété suivante :

Propriété 1.

Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$

Démonstration.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On pose pour tout réel x,

$$\phi(x) = f(x)f(-x)$$

Par composition et produit de fonctions dérivables, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\phi'(x) = f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) = f(x)f(-x) - f(-x)f(x) = 0$$

La fonction ϕ est donc constante sur $\mathbb{R}$, et comme $\phi(0) = f(0)f(0) = 1$, on obtient que pour tout réel x : $\phi(x) = 1$.
Donc, pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$, et donc $f(x) \neq 0$

Finalement, pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$ □

Démonstration.

On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$, on veut montrer qu'elle est unique.

On suppose alors l'existence d'une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On vient de montrer que, pour tout réel x, $g(x) \neq 0$, on peut alors s'intéresser à la fonction $h = \frac{f}{g}$ qui est dérivable par produit de fonction dérivable ne s'annulant pas.

On a alors pour tout réel x,

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} = 0$$

Donc la fonction h est constante, et comme $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$, on a pour tout réel x :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Donc la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ est unique. $\square$

2 Premières propriétés de la fonction exponentielle

2.1 Positivité

Temps prévu : 10min
But : Prouver la positivité de la fonction exponentielle
Difficulté : Théorème des valeurs intermédiaires
Temps réel passé : 10min

Propriété 2.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On a vu que pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un réel x_0 telle que $\exp(x_0) < 0$.
Comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Si $x_0 > 0$
$\exp$ est continue sur $[0, x_0]$, avec $\exp(0) = 1 > 0$ et $\exp(x_0) < 0$, donc $0 \in [\exp(0), \exp(x_0)]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel x_1 tel que $\exp(x_1) = 0$.
C'est impossible d'après la propriété 1, donc $\exp$ est positive sur $[0, +\infty[$.
Si $x_0 < 0$
On procède de la même manière mais cette fois en considérant $\exp$ sur $[x_0, 0]$.

Donc la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. $\square$

2.2 Propriété de bijection

Temps prévu : 5min
But : Prouver la croissance de la fonction exponentielle et parler de la propriété de bijection
Difficulté : Propriété de bijection
Temps réel passé : 7min

Propriété 3.

La fonction exponentielle est strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\square$

Remarque La fonction exponentielle est bijective signifie que $\forall$ a,b $\in \mathbb{R}$:

$$a = b \leftrightarrow e^a = e^b$$

Exemple 1 Resoudre

1. $e^x = e^5$
2. $e^x < e^8$
3. $e^x \geq e^6$

2.3 Propriété fondamentale du produit

Temps prévu : 5min
But : Montrer les méthodes de calculs
Temps réel passé : 5min

Propriété 4.

$\forall\ a,b \in \mathbb{R}$,

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

Démonstration.

Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut considérer la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$$

où y est un réel.

La fonction f est dérivable par composition est quotient de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors pour tout réel x

$$f'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

Donc la fonction f est une fonction constante, et comme $f(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$, on a

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$$

□

2.4 Conséquences pour le quotient

Temps prévu : 5min
But : Montrer les méthodes de calculs
Temps réel passé : 1min

Propriété 5.

1. $\forall\ a \in \mathbb{R}, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
2. $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Démonstration.

1. $\forall$ a $\in \mathbb{R}$, $\quad e^0 = e^{a-a} = e^a e^{-a} = 1$. Donc $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
2. $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$, $\quad e^{a-b} = e^a e^{-b} = \frac{e^a}{e^b}$

□

Temps prévu : 10min
But : Montrer les méthodes de calculs et utiliser le raisonnement par récurrence
Difficultés : Confusion dans les puissances $(e^a)^n \neq e^{a^n}$ et raisonnement par récurrence
Temps réel passé : 2min

5 Conséquences pour l'exposant

opriété 6.

$\forall\ a \in \mathbb{R}$ *et* $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$e^{na} = (e^a)^n$$

monstration.

Par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, $\forall$ a $\in \mathbb{R}$, $e^{0*a} = 1$ et $(e^a)^0 = 1$. Donc la propriété est vraie au rang 0.

On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 0$, on va montrer que la propriété est vraie au rang $+ 1$.
$\forall$ a $\in \mathbb{R}$,

$$e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na}e^a = e^a(e^a)^n = (e^a)^{n+1}$$

Donc la propriété est héréditaire. Donc par récurrence $\forall$ a $\in \mathbb{R}$ et $\forall$ n $\in \mathbb{N}$,

$$e^{na} = (e^a)^n$$

□

Exemple 2 Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^{2x}e^{-2x}$
2. $e^{2x+1}e^{1-x}$
3. $\frac{e^{x+2}}{e^{-x+2}}$
4. $\frac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}+1}$
5. $(e^x)^2(e^{-x})^3$
6. $(e^{1-x})^2e^{2x}$

Temps prévu : 10min
But : Simplifier des expressions
Difficulté : Confusion dans les méthodes de calculs
Temps réel passé : 10min

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{2x} = e^x$
2. $e^{2x+1} = e^{2-x}$
3. $e^{x^2} = e^4$
4. $e^x - e^{-2x} = 0$
5. $e^{x^2-1} = e^{2x}$
6. $e^{5x} = 1$
7. $e^x + 6 = 0$
8. $e^x + e^{-x} = 2$
9. $e^{4x} + e^{2x} = 2$
10. $e^{3x+1} + e^{2x+1} = e^{x+2} + e^{2x+2}$

Temps prévu : 20min
But : Résoudre des équations
Difficulté : Utilisation de la propriété de bijection
Temps réel passé : 25min

Exemple 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{x+1} \leq e^2$
2. $e^{1-2x} \geq e^x$
3. $e^{-x+6} \leq e^{4x}$
4. $e^{-x} < 1$
5. $e^{4x^2+1} \geq e^{4x}$
6. $e^x < \frac{1}{e^x}$

Temps prévu : 10min
But : Résoudre des inéquations
Difficultés : Utilisation de la propriété de bijection et de croissance
Temps réel passé : 2min

Exemple 5 Calculer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $g(x) = 2xe^x$
3. $h(x) = x^2e^x$
4. $k(x) = \frac{3x}{e^x}$
5. $m(x) = e^{3x}$
6. $n(x) = e^{x+1}$

Temps prévu : 10min
But : Dériver des fonctions avec une exponentielle
Difficulté : Dériver un produit de fonctions
Temps réel passé : 0min

Annexe L : Séance d'exercices sur la fonction exponentielle préparée par Florence

7/12/15 Terminales S

Exercices Fonction exponentielle

Exercice 1 :

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$(unité graphique 2cm).

Pour tout l'exercice on pourra admettre que $\lim_{x\to+\infty} x^2\, e^{-x} = 0$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1) Etudier les limites de *g* en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Calculer la dérivée de *g* et déterminer son signe.
3) En déduire le tableau de variation de *g*.
4) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
5) En déduire le signe de *g*.

Partie B : Etude de *f*

1) Etudier les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.
3) En déduire, à l'aide de la partie A, les variations de *f* et donner son tableau de variation.
4) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$
5) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.
6) Tracer T puis (C).

Exercice 2 :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie A : Etude de fonctions auxiliaires

1) Soit *h* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x + 1$
   Etudier le sens de variation de *h* et démontrer que $h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.
   a) Déterminer les limites de *g* en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Etudier le sens de variation de *g* et dresser le tableau des variations de *g*.
   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   On note α et β ces solutions, avec $\alpha > \beta$. Prouver que $1.14 < \alpha < 1.15$.
   d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction *f* et tracé de la courbe $(\mathcal{C})$

1) Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2) a) Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction *f* et dresser le tableau des variations de *f*.
3) a) Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.
   b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question Partie A 2), déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.
4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5) a) Etablir que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
   $$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1} \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1$$
   b) Etudier le sens de variation de la fonction *u*.
   En déduire le signe de $u(x)$.
   c) En déduire des questions précédentes la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).
6) Tracer $(\mathcal{C})$ et (T).
   On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.
   On pourra admettre que $-1.85 < \beta < -1.84$ et $-1.19 < f(\beta) < -1.18$.